
UC-NRLF



ASTROMETRIE

ODER

DIE LEHRE VON DER ORTSBESTIMMUNG IM HIMMELSRAUME

ZUGLEICH ALS GRUNDLAGE ALLER ZEIT- UND RAUMMESSUNG

VON

Dr. WILHELM FOERSTER

PROFESSOR DER ASTRONOMIE AN DER UNIVERSITÄT ZU BERLIN.

ERSTES HEFT

DIE SPHÄRIK UND DIE KOORDINATENSYSTEME, SOWIE DIE BEZEICHNUNGEN UND DIE SPHÄRISCHEN KOORDINATENMESSUNGEN.

BERLIN

DRUCK UND VERLAG VON GEORG REIMER

1905.

VORWORT.

Die ältere Einteilung des astronomischen Lehrgebäudes in sphärische, theorische und physische Astronomie wird immer allgemeiner aufgegeben, seitdem die Astrophysik als ein selbständiger Wissenschaftszweig so erfolgreich emporgewachsen ist, und seitdem auch die Grenzlinien zwischen der sogenannten theorischen und der sogenannten physischen Astronomie bedeutungsloser geworden sind.

Anscheinend ist unter den Fachmännern die Zustimmung zu einer andern Art der Einteilung im Wachsen begriffen:

Astrometrie, Astromechanik und Astrophysik.

In dieser Einteilung umfaßt die Astrometrie dasjenige Lehrgebiet, welches man früherhin als sphärische Astronomie bezeichnete, und welches man so zu bezeichnen fortfuhr, obgleich dasselbe sich schon längst immer weiter über die bloße Sphärik hinaus entwickelt hatte.

Die Astromechanik umfaßt nahezu diejenigen Lehrgebiete, die man früher in der theorischen und in der physischen Astronomie gesondert behandelt hatte.

Die Astrophysik nimmt einige Teile der früheren physischen Astronomie in sich auf und ist im übrigen das große neue Lehr- und Forschungsgebiet, welches aus der tieferen Erkenntnis und Verwertung der Lichtwirkungen hervorgegangen ist und auch das Studium der elektrischen Vorgänge und Probleme im Himmelsraume, sowie die Astrochemie in sich aufnimmt.

Die Scheidung der Astromechanik von der Astrophysik kann natürlich keine strenge sein, denn man kann auch bereits von einer Mechanik der Lichterscheinungen und der elektrischen und magnetischen Erscheinungen, sogar der chemischen Vorgänge reden;

aber die Astromechanik, entsprechend dem französischen Ausdruck „Mécanique céleste“, beschränkt sich einstweilen auf die Theorien von den makrokosmischen Bewegungserscheinungen, und zwar hauptsächlich von den unter der Wirkung der sogenannten allgemeinen Massenanziehung vor sich gehenden.

Die Astrometrie, als die Grundlage dieser Astromechanik, nämlich als die Lehre von den Maßbestimmungen der makrokosmischen Konfigurationen und ihrer Veränderungen, läßt sich nicht völlig streng von demjenigen Teilgebiet der Astrophysik scheiden, welches sich auch mit Bewegungsmessungen im Himmelsraume auf Grund der feinsten Zerlegungen des Lichtes und mit der Verwertung der Photographie für die Maßbestimmung makrokosmischer Bewegungserscheinungen beschäftigt.

Ebenso wenig aber kann die Astrophysik in Lehre und Forschung ihrerseits der Grundlagen der Astrometrie entbehren. Unvollkommenheiten der Abgrenzung haften aber in einem gewissen Grade allen Einteilungen an. Was in dem einen Abschnitte oder Zweige in einen größeren Zusammenhang fundamental eingeordnet erscheint, das kommt in einem anderen als Hülfsmittel oder Nebenaufgabe und Nebenergebnis zur Sprache.

Die Astrometrie, als Lehre von der Ortsbestimmung im Himmelsraume oder von den Maßbestimmungen der makrokosmischen Konfigurationen und ihrer Veränderungen, hat zugleich die Aufgabe, solche Konfigurationsänderungen oder -bewegungen, welche durch die besondere Einfachheit und Stetigkeit ihres Verlaufs sich zum Grundmaße aller anderen Bewegungserscheinungen eignen, aufzusuchen, zu erforschen und für die Maßbestimmung aller Bewegungen zu verwerten. Die Astrometrie wird dadurch überhaupt zu dem Fundament der Wissenschaft und Lehre von der Zeit- und Raummessung. In diesem mehr kritischen und erkenntnis-theoretischen Sinn will ich die ganze Aufgabe behandeln, indem ich auf Vollständigkeit im einzelnen und besonders in den numerischen Angaben verzichte.

In dem vorliegenden ersten Heft sind nun die Grundzüge der Ortsbestimmungen am Himmel sowie der Zeit- und Raummessung, sodann die Koordinatensysteme und die Bezeichnungen, ferner die

ersten Näherungen der Koordinatenmessungen im Sinne der sogenannten Sphärik behandelt.

Die Fortsetzung soll in einer freien Folge von ähnlichen Heften gegeben werden.

Nach Inhalt und Form ist das Ganze nicht bloß für Astronomen und für den astronomischen Unterricht, sondern auch für Studierende und Lehrer aller mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer, sowie überhaupt für die Freunde der exakten Forschung bestimmt.

Berlin-Westend, im Sommer 1904.

Prof. Wilhelm Foerster.



I.

DIE SPHÄRIK.

Die Ortsbestimmung überhaupt.

Der Ort eines Gegenstandes der Außenwelt wird bestimmt durch seinen kürzesten Abstand von einem irgendwie festgelegten Anfangspunkt oder Ursprung und durch die Lage der geraden Linie, in welcher dieser kürzeste Abstand gemessen wird, gegen mindestens zwei verschiedene, durch den Ursprung gehende feste gerade Linien oder Richtungen.

Es ist eine Frage der physikalischen und erkenntnis-theoretischen Kritik, ob das Idealgebilde einer geraden Linie zwischen zwei Punkten im Raume überhaupt für die Messung in unserer Außenwelt irgendwie zu verwirklichen ist. Bisher hat man angenommen, daß die Fortpflanzung der Lichtwirkungen in einem Medium, welches dieser Fortpflanzung nach allen Richtungen homogene Bedingungen darbietet (in einem sogenannten isotropen Medium) eine geradlinige Richtung zwischen einem lichtentsendenden Punkte und einem von diesem Lichte unmittelbar getroffenen Punkte darstellt. Gewisse geodätische Messungsreihen, in denen lineare Abstandsmessungen mit Richtungsmessungen verbunden sind, haben diese Annahme mit einem Genauigkeitsgrade bestätigt, welcher auch für die Anwendung derselben Annahmen in der Astronomie genügende Rechtfertigung gewährt. In der Tat haben sich auch bei der bisher schon erfolgten Anwendung dieser Annahmen auf letzterem Gebiete noch keinerlei Schwierigkeiten oder Bedenken ergeben.

Bei der Bestimmung des Ortes eines Gegenstandes der Außenwelt durch den Abstand von einem festen Ursprunge und durch die Lage der geraden Abstandslinie (des Radius Vector oder Vector) gegen zwei verschiedene, durch den Ursprung gelegte

feste Richtungen hat zunächst die menschliche Innenwelt die Vermittelung zu übernehmen. Die Nervenfläche oder Netzhautfläche unseres Auges empfängt die Lichtwirkungen sowohl von dem Gegenstande, dessen Ort zu bestimmen ist, als auch von dem Gegenstande, welcher als der Träger des festen Punktes oder Ursprunges für die Ortsbestimmung dienen soll. Die Lage beider Örter wird zunächst auf den jeweiligen Ort der lichtempfangenden Nervenfläche des Beobachters bezogen und in der die bezüglichen Eindrücke zusammenfassenden und bewahrenden Gehirn-Provinz desselben in Verbindung mit anderweitigen Wahrnehmungen und Erinnerungen derartig mathematisch verwertet, daß schließlich der jeweilige Ort der lichtempfangenden Stelle jener Nervenfläche eliminiert und der Ort des bezüglichen Gegenstandes an den Ort des Ursprungs angeknüpft, mit anderen Worten, die rein subjektive Ortsbestimmung in eine objektivere übergeführt wird.

Das binokulare Sehen und die Augenparallaxe. Hierbei ist es einerseits eine Erschwernis, andererseits eine Sicherung und Vervollständigung des Verfahrens, daß der mit zwei Augen ausgerüstete Mensch den Lichtwirkungen zwei Nervenflächen darzubieten vermag, auf deren jeder ein subjektiver Anfangspunkt oder Ursprung für die Ortsbestimmung von Gegenständen der Außenwelt gewählt werden kann. — Von einem lichtentsendenden Punkte der Außenwelt (dem Objekt) wird auf jeder der beiden Netzhautflächen eine Reizwirkung hervorgerufen in Gestalt einer sehr kleinen Bildfläche, deren Umriß ein stark verkleinertes Abbild der — nahezu kreisförmigen — freien Augenöffnung darstellt. Diese beiden Bilder des lichtentsendenden Punktes werden von der Innenwelt unseres Vorstellungslebens (dem Subjekt) nur dann als die Wirkung eines und desselben Punktes, aus dessen Lichtwirkung sie hervorgehen, zutreffend empfunden, wenn sie an sogenannten korrespondierenden Stellen der beiden Netzhautflächen in Empfang genommen werden. Diese Bedingung wird durch instinktive Gewöhnung und reflektorische Aktion der Muskeln, welche jedem der beiden Augen eine bestimmte Richtung geben können, derartig erreicht, daß jede der beiden sogenannten Augenachsen auf den Gegenstand gerichtet wird. Hierdurch entsteht dann instinktiv der Grundtypus einer Art von Dreiecksmessung, bei welcher die gerade Verbindungslinie der beiden Bilder oder die sogenannte Augendistanz die Grundlinie und das Objekt die Dreiecksspitze bildet. Je kleiner der Abstand des Objekts von der Grundlinie,

desto stärker müssen die Richtungen der beiden Augenachsen gegeneinander konvergieren, um die beiden Bilder an die korrespondierenden Stellen der Netzhautflächen zu bringen und sie dadurch im Bewußtsein zu vereinigen, wobei sich ihre Wirkungen summieren.

In der physiologischen Dioptrik, insbesondere auch in der Lehre von den stereoskopischen Wahrnehmungen, wird die Bedeutung näher erörtert, welche diese gewissermaßen trigonometrischen Einstellungen der beiden Augen und die dadurch mehr oder minder instinktiv ermöglichten Schätzungen von Verschiedenheiten der Abstände der uns zunächst umgebenden Objekte für unsere erste Orientierung im Raume haben.

Es ist aber auch an dieser Stelle förderlich, bei obiger Betrachtung etwas zu verweilen, weil sie uns mit Hülfe sehr einfacher Wahrnehmungen sofort den Begriff der „Parallaxe" in das Gebiet der Ortsbestimmungen und Abstandsmessungen einführen hilft.

Die größere oder geringere Konvergenz der beiden Augenachsen bei der Fixierung des Anblicks eines näheren oder entfernteren Objektes kommt wohl zunächst zu unserm Bewußtsein durch die Empfindung des Grades der zugehörigen reflektorischen Betätigung der Muskeln, welche die jeweilige Richtung der Augenachsen regulieren. Man kann aber nach der Einstellung beider Augen auf einen und denselben Gegenstand sofort auch durch abwechselndes Schließen und Öffnen der beiden Augen wirkliche trigonometrische Messungen mit Hülfe der Augendistanz ausführen. In Fig. 1 bezeichne R den Punkt, um welchen das rechte Auge bei der Fixierung des (als lichtentsendender Punkt G angenommenen) Objektes durch die Richtmuskeln gedreht wird, L dasselbe für das linke Auge. Wenn dann WW eine entfernte Wand darstellt, auf welcher ein maßstabartiges System von Marken oder Strichen aufgetragen ist, so sieht man leicht, daß beim Schließen des rechten Auges das Bild von G im linken Auge mit dem Bilde eines Striches S_l zusammenfällt, welcher in der Verlängerung der Richtung von L nach G gelegen ist. (Dies ist zwar nur näherungsweise richtig, denn das Bild von G fällt nur dann genau zusammen mit dem Bilde von L_l, wenn der letztere Punkt in der Verlängerung der Richtung von dem vorderen Knotenpunkte des Auges nach G hin liegt. Dieser Knotenpunkt liegt indessen zu dem Drehpunkt L derartig, daß für die

vorliegende Art von Betrachtung kein erheblicher Fehler durch obige Annahmen entsteht.

Wenn man sodann das rechte Auge öffnet und das linke schließt, während die Stellung des Kopfes zu G und zu WW unverändert bleibt, so sieht man jetzt im rechten Auge das Bild von G mit dem Bilde eines Striches S_r zusammenfallen, welcher in der Verlängerung der Richtung von R nach G liegt. Ist dann die Wand WW oder wenigstens die Strichreihe auf derselben nahezu parallel zu der Augendistanz RL, so kann man einfach aus dem Verhältnis der Strichdistanz $S_l S_r$ $(= s)$ zu der Augendistanz RL $(= a)$ die Lage des Objektes G zwischen RL und WW berechnen. Es ist nach den Voraussetzungen der Figur

$$\frac{GR}{GS_r} = \frac{GL}{GS_l} = \frac{RL}{S_r S_l} = \frac{a}{s}$$

Kennt man die Augendistanz a, so kann man aus der beobachteten Ortsveränderung s, welche das Bild von G bei abwechselndem Schließen und Öffnen der beiden Augen (in unveränderter Kopflage) innerhalb der Reihe der Striche S erfährt, die Abstände des Objektes G von der Augendistanz berechnen, sobald man auch den Abstand der Wand WW von der Augendistanz kennt; oder umgekehrt wenn man die Lage von G zwischen RL und WW kennt, vermag man aus der beobachteten Verschiebung s des Bildes von G in der Strichreihe auch die Augendistanz a zu bestimmen usw. Man hat beispielsweise, wenn der kürzeste Abstand zwischen der Wand WW und der Augendistanz RL $(= D)$ bekannt und s ebenso wie a gemessen ist, zur Bestimmung des kürzesten Abstandes des Objektes G von der Augendistanz RL $(= d)$ die Gleichung

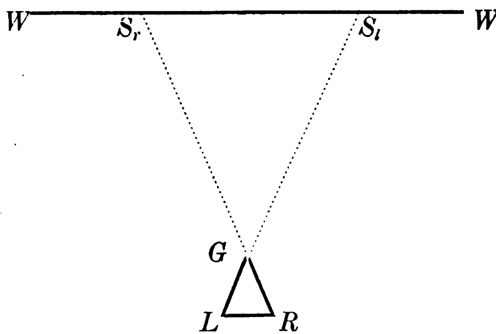


Fig. 1.

$$\frac{d}{D-d} = \frac{a}{s} \text{ also } d = \left(\frac{a}{s+a}\right) \cdot D.$$

Ebenso auch, wenn d bekannt, sowie s und a gemessen sind:

$$D = \left(\frac{s+a}{a}\right) d.$$

Der Winkel RGL, welcher in obiger Figur ein wesentliches Bestimmungsstück für die projektivische Verschiebung des Bildes von G durch die abwechselnde Isolierung des Sehens mit dem einen und mit dem andern Auge (bei unveränderter Lage des Kopfes) bildet, wird mit dem Namen „Augen-Parallaxe" bezeichnet. Der Ausdruck „Parallaxe" ist nämlich geprägt für alle diejenigen Änderungen, welche — bei unveränderter Lage des Objektes — die Richtung vom beobachtenden Subjekte nach dem Objekte hin lediglich durch die Ortsveränderung des Subjektes erleidet, und die letztere Ortsveränderung wird in dem obigen Beispiel durch die abwechselnde Benutzung des einen und des andern Auges dargestellt.

Das stereo pische Se

Bei gleichzeitigem Sehen mit beiden Augen kommt die Augen-Parallaxe und ihre Abhängigkeit von dem Verhältnis zwischen dem Abstande der beiden Augen voneinander und den Abständen der Objekte nicht unmittelbar zu so deutlichem Bewußtsein, wie es nach Fig. 1 bei abwechselndem Schließen und Öffnen der beiden Augen mit der abwechselnden Projektion des Objektes G auf die entfernteren Objekte S_r und S_l der Fall ist. Bei gleichzeitiger Anwendung beider Augen wird nämlich, sobald G deutlich ins Auge gefaßt ist, weder S_r noch S_l ganz deutlich gesehen, und zwar hauptsächlich deshalb nicht, weil z. B. das Bild, welches von S_r in dem linken, auf G und S_l gerichteten Auge entsteht, auf eine Stelle der Netzhaut dieses Auges trifft, welche zu derjenigen Stelle der Netzhaut des rechten Auges, an der gleichzeitig das Bild von S_r und G entsteht, nicht korrespondierend ist, so daß dann die Vereinigung der beiden Abbildungen von S_r im Bewußtsein und damit überhaupt die Deutlichkeit des Anblicks von S_r gestört ist. Dasselbe gilt für die gleichzeitige Abbildung von S_l in den beiden auf das Objekt G gerichteten Augen. Bei gleichzeitigem Sehen mit beiden Augen äußert sich daher die parallaktische Wirkung mit Deutlichkeit eigentlich nur in dem sogenannten stereoskopischen Effekt. Der Kern dieses Effektes besteht darin, daß von allen Objekten, welche, beispielsweise nach Fig. 1 für das linke Auge durch G verdeckt sind, Abbildungen in dem rechten Auge entstehen und zwar Abbildungen, welche keine Konkurrenz im Bewußtsein

durch eine störende Abbildung derselben Objekte an nicht korrespondierenden Stellen des andern Auges erfahren. Dasselbe ist umgekehrt der Fall im linken Auge mit den Objekten, welche für das rechte Auge durch *G* verdeckt sind.

Das körperliche oder räumliche Sehen kommt offenbar durch das parallaktische Zusammenwirken der beiden Augen in obiger Weise zustande, aber in seinem Entstehen wird es uns nur völlig deutlich bewußt durch abwechselndes Schließen und Öffnen der beiden Augen. Der volle stereoskopische Effekt kann aber auch bei gleichzeitiger Anwendung beider Augen dadurch erzielt werden, daß man die relative Lage der umgebenden Objekte, wie sie sich bei Schließung des einen und bei Öffnung des andern Auges darstellt, graphisch in einer Fläche abbildet und sodann dasselbe bei unveränderter Lage des Kopfes, mit Anwendung des vorher geschlossenen und mit Schließung des vorher geöffneten Auges ausführt. Wenn dann jede dieser beiden gesonderten Darstellungen demjenigen Auge, welches bei der Aufnahme derselben zur Anwendung gekommen ist, unterbreitet wird, und zwar in solcher Weise, daß jedes Auge dabei nur die ihm zugehörige Abbildung erblickt, so erscheint bei gleichzeitiger Ausführung dieser Betrachtung mit beiden Augen sofort im Bewußtsein der ganze Anblick der bezüglichen Umgebung räumlich vertieft und körperlich gestaltet.

Statt der graphischen Ausführung solcher gesonderten Darstellungen mit je einem der beiden Augen kann auch die photographische Abbildung der Umgebung derartig dienen, daß man den photographischen Apparat bei den Aufnahmen successive an die Stelle der beiden Augen setzt. Unterbreitet man sodann diese gesonderten Abbildungen in obiger Weise den zugehörigen Augen, so entsteht in großer Vollendung derselbe Eindruck der räumlichen Vertiefung und körperlichen Gestaltung des Anblickes der bezüglichen nächsten Umgebung.

Wenn man diese beiden photographischen Aufnahmen einer und derselben Gruppe von Objekten an zwei Standorten ausführt, deren Distanz voneinander beliebig viel größer ist, als die Augendistanz, so kann man die Wahrnehmung der räumlichen Vertiefung und der körperlichen Gestaltung auch auf viel größere Entfernungen hin näherungsweise erlangen, sobald man das Ergebnis der auf dem Standorte links ausgeführten Aufnahme dem linken Auge und das

Ergebnis der auf dem Standorte rechts ausgeführten Aufnahme gleichzeitig dem rechten Auge unterbreitet.

Mit Hülfe von Prismen und Spiegeln kann man aber auch ohne photographische Aufnahmen den beiden Augen gleichzeitig eine entferntere Gruppe von Objekten räumlich und körperlich deutlicher in ihrer gegenseitigen Lage und in ihren verschiedenen Abständen vom Beobachter zur unmittelbaren Anschauung bringen, indem man jedem der beiden Augen die Lichtstrahlen durch Spiegelungen zuführt, die von derselben Gruppe von Objekten auf Prismen oder Spiegel fallen, deren einer in einem größeren Abstande rechts vom rechten Auge, und deren anderer in demselben größeren Abstande links vom linken Auge sich befindet. Falls die obenerwähnten beiden zusammengehörigen photographischen Aufnahmen nicht gleichzeitig erfolgen und in der Zwischenzeit Veränderungen in der Gruppierung der Objekte stattfinden, wird sofort die Zusammenfügung der beiden Bilder zu einer und derselben räumlichen Anordnung im Bewußtsein aufs empfindlichste gestört, und man besitzt dadurch in dem ganzen binokularen und stereoskopischen Verfahren ein ausgezeichnetes Hülfsmittel zur Erkennung der geringsten Veränderungen in jenen Gruppierungen. Die einfache Augenparallaxe kann natürlich für Abstandsbestimmungen nur in der nächsten Umgebung des Beobachters irgend eine praktische näherungsweise Bedeutung haben. Sie ist daher im wesentlichen nur instruktiv, aber für die ersten Unterweisungen auf dem Gebiete des Messungswesens und der Trigonometrie hat sie in der Tat eine noch viel zu wenig verwertete Bedeutung.

Das Visie mit dem A

Für die eigentliche Abstands- und Richtungs-Messung, wobei auch Ortsveränderungen des Beobachtungssubjektes eintreten, muß aber das Zusammenwirken der beiden Augen aufgegeben werden. Hier vertritt nur eines der beiden Augen den Beobachter. Da aber auf der Nervenfläche des einzelnen Auges kein bestimmter Fixpunkt als Einstellungspunkt für das Bild eines anvisierten Objektpunktes und auch kein direktes Messungsmittel für die Veränderungen der Richtung der Augenachse vorhanden ist, so muß durch künstliche Veranstaltung außerhalb des Auges und in nächstem Anschlusse an dasselbe mit Hülfe zweier Objektpunkte, die in fester Verbindung miteinander aber nicht zu nahe aneinander sind, die Verkörperung einer Richtung geschaffen werden, die man mit Hülfe des Auges auf beliebige andere Objektpunkte — nahe und

Das Diopter. ferne — einstellen kann. Dies geschieht in bekannter elementarer Weise, z. B. beim Schießen mit „Visier und Korn", vollkommener mit Hülfe zweier kreisförmigen Öffnungen, von denen die eine, möglichst klein zu haltende (die Okular-Visieröffnung), dicht vor das Auge gebracht wird, die andere, mit der ersteren durch ein Rohr oder überhaupt durch einen festen Rahmen zu verbindende und größer zu gestaltende (die Objektiv-Visieröffnung) auf die einzustellenden Objekte gerichtet wird. Wenn nun die Okularöffnung konzentrisch vor die Augenöffnung gebracht wird und dann auf der Netzhaut des Auges das Bild eines entfernteren Objektpunktes in der Mitte des Bildes der freien Objektivöffnung des Rohres erscheint, so darf man annehmen, daß die Richtung des Lichtstrahls, welcher von dem entfernteren Objektpunkte durch den vorderen Visier- oder Knotenpunkt des Auges selber geht, nahe übereinstimmt mit der Richtung, welche in dem Zeitpunkt jener Einstellung den Mittelpunkt der kreisförmigen Okularöffnung mit dem Mittelpunkt der kreisförmigen Objektivöffnung verbindet. Dies ist die Grundlage und die Technik des Visierens oder der Richtungseinstellung mit bloßem Auge, insbesondere der astronomischen Richtungsmessung geworden. Die Lage der geraden Linie zwischen dem Mittelpunkt der Okularöffnung und dem Mittelpunkt der Objektivöffnung, also nahezu die Figuraxe des Rohres oder Rahmens, mittels dessen die Fassungen der beiden Öffnungen verbunden werden, ergibt in dem Augenblick, in welchem der entferntere Objektpunkt dem Auge im Mittelpunkte der freien Objektivöffnung erscheint, die Lage des von diesem Objektpunkt auf die Mitte der Vorderfläche des Auges fallenden Lichtstrahles, und durch die Kleinheit der Okularöffnung wird auch die gleichzeitige Deutlichkeit des Sehens des entfernteren Objektes und der Ränder der näheren Objektivöffnung begünstigt.

Die camera obscura und das Fernrohr. Nur bei sehr hellen Objekten, insbesondere bei der Sonne, kann die derzeitige Richtung der Strahlen auch durch die Projektion von Schattenwirkungen im Raume festgelegt werden. Am vollkommensten geschieht dies in der sogenannten camera obscura, in welcher das von einem leuchtenden Objektpunkte geworfene Schattenbild der die Objektivöffnung umrahmenden kreisförmigen Fassung in Gestalt eines diese Öffnung selber darstellenden hellen Scheibchens auf einer ebenen, diffus reflektierenden oder diffus durchsichtigen Fläche, mit möglichstem Ausschlusse alles andern Lichtes (daher camera

obscura) aufgefangen wird. Die gerade Linie, welche den Mittelpunkt dieses Bildes der freien Objektivöffnung mit dem Mittelpunkte dieser letzteren selber verbindet, stellt dann die Richtung des von dem leuchtenden Objektpunkte auf den letzteren Mittelpunkt fallenden Lichtstrahles dar.

Eine Konfiguration von leuchtenden Objektpunkten, wie sie z. B. die Sonnenscheibe bilden, erscheint natürlich in der camera obscura als eine entsprechende Konfiguration von Bildern der freien Öffnung, und die Ähnlichkeit zwischen dieser Konfiguration von Bildern und der Konfiguration der leuchtenden Objektpunkte wird um so deutlicher, je kleiner die freie Öffnung selber ist, und je kleiner danach auch ihre Bilder sind.

Tritt an die Stelle des einfachen Diopterrohres mit kleiner Okularöffnung und größerer Objektivöffnung das dioptrische (Linsen-) oder das katoptrische (Spiegel-)Fernrohr, so wird die Richtung der von einem Objektpunkte herkommenden Strahlen dargestellt und ersichtlich gemacht durch die gerade Linie, welche das von dem Lichte dieses Objektpunktes mittels der Linsen- oder Spiegel-Systeme erzeugte Bild mit einem durch die Theorie und die besonderen Einrichtungen des bezüglichen Systems scharf bestimmten Punkte des letzteren verbindet.

Die nächste Aufgabe für die Ortsbestimmung ist nun die Festhaltung und Verwertung der jeweiligen Richtungsbestimmung mit dem Diopterrohr, durch dessen Okularöffnung man mit dem Auge nach dem Objektpunkte, mittels Einstellung desselben in die Mitte der Objektivöffnung, visiert hat, oder der Richtungsbestimmung mit der camera obscura, in welcher man unter der schattenwerfenden Wirkung sehr hell leuchtender Objekte die Projektionsbilder der freien Objektivöffnung an einer bestimmten Stelle aufgefangen hat oder endlich der Richtungsbestimmung mit dem Fernrohr, in welchem man die Lage der Bilder der Objektpunkte gegen bestimmte feste Punkte in der Bildebene mit der Okularlupe beobachtet hat.

Die Festhal- tung der Lag des Visier- apparates un die Messun seiner Lage änderunge

Die Festhaltung der durch jene Hülfsmittel in einem bestimmten Zeitpunkte beobachteten Richtung der Lichtstrahlen, die von einem Objektpunkte auf die Mitte der Objektivöffnung des Diopters fallen (beim Fernrohr auf einen scharf bestimmbaren Punkt des objektiven Linsen- oder Spiegel-Systems weisen), könnte nun zunächst relativ gegen die Richtungen der von andern, hierzu geeigneten Objektpunkten ausgesandten Strahlen geschehen, indem man nämlich be-

obachtet, ob und welche Objektpunkte, die in größerem Abstande vom Beobachter liegen, gleichzeitig im Gesichtsfelde mit dem näheren Objektpunkte wahrnehmbar sind, und indem man durch Schätzung oder Messung die relative Lage des Bildes des näheren Objektpunktes gegen die Bilder der entfernteren Objektpunkte festlegt, bezw. das vollständige Zusammenfallen der Richtung nach den letzteren hin mit der Richtung nach den ersteren hin konstatiert. Wenn dann der Beobachter mit dem Apparat der Richtungsmessung weiterhin seinen Ort verändert und von dem neuen Ort aus, dessen geradliniger Abstand von dem vorherigen Orte durch Maßstäbe usw. ausgemessen wird, wiederum die Richtung nach dem vorher anvisierten Objektpunkte einstellt, sodann dieselbe wiederum relativ festlegt gegen die Richtungen nach entfernteren Objektpunkten, welche gleichzeitig in dem Gesichtsfelde des Visierapparates erscheinen, so läßt sich hieraus die Lage des von den beiden Beobachtungsorten aus anvisierten näheren Objektpunktes gegen diese beiden Beobachtungsorte und gegen ihre gerade Verbindungslinie vollständig nach Abständen und Richtungen ermitteln, sobald man die Winkel gemessen hat, welche die Richtungen nach den entfernteren Objektpunkten von den beiden Beobachtungsorten aus mit der Richtung der geraden Verbindungslinie dieser beiden Orte bilden. Diese Winkel sind aber um so sicherer bestimmbar, nämlich um so weniger durch Ortsveränderungen jener entfernteren Objekte selber und durch die Veränderungen und Verschiedenheiten der Lage der Beobachtungsorte veränderlich, je größer die Abstände jener, als Anhaltspunkte dienenden, entfernten Objektpunkte von den Beobachtungsorten sind. Am vollkommensten werden diese Bedingungen für uns erfüllt durch die Fixsterne, da die Richtungen der von einem Fixstern ausgesandten Strahlen sogar nach den verschiedensten Punkten des Erdkörpers hin nur unmeßbar kleine Winkel miteinander bilden. Und die vollkommensten Ortsbestimmungen auf der Erde, sowie überhaupt in der uns näheren Erscheinungswelt, schließen sich in der Tat mit Hilfe der Fixsterne im wesentlichen an die vorstehend erörterten Grundzüge des Ortsbestimmungs-Verfahrens an.

Um nun aber die Kenntnis der Winkel zu erlangen, welche die Richtungen der von den verschiedenen idealen Objektpunkten dieser Art ausgesandten Lichtstrahlen miteinander und mit den Richtungen der geraden Verbindungslinien der verschiedenen Be-

obachtungsorte bilden, muß man die Visierapparate um gewisse Achsen drehbar und diese Drehungen durch eingeteilte Kreise, deren Ebenen rechtwinklig zu den Drehungsachsen liegen, meßbar machen. Am vollkommensten wird aber schließlich diese Winkelmessung mit Hilfe der Drehung des Erdkörpers und ihrer Einteilung durch die zeitmessenden Apparate ausgeführt werden.

Die Grundzüge der Winkelmessung.

Die nächstliegende Disposition zur Bestimmung des Winkels zwischen zweien, durch die Einstellungen des Visierapparates dargestellten Strahlenrichtungen besteht darin, daß man den Visierapparat in der Ebene des zu messenden Winkels um eine rechtwinklig zu dieser Ebene zu stellende Achse drehbar macht und dann den Drehungswinkel, der zum Übergang von der einen Einstellung auf die andere erforderlich wird, an einem parallel zu derselben Ebene, also rechtwinklig und konzentrisch zu der Drehungsachse liegenden eingeteilten Kreise ablesbar macht. Bei dem Diopter kann der Mittelpunkt dieser Drehung ebenso wohl mit dem Mittelpunkt der Objektivöffnung oder der Okularöffnung, wie mit irgend einem, zwischen diesen beiden und auf ihrer Verbindungslinie liegenden Punkte zusammenfallen, je nach konstruktiven Erwägungen. Dieser Drehungsmittelpunkt gilt dann jedenfalls als der eigentliche Beobachtungsort der Richtungs- und Abstands-Bestimmungen für die nähere Erscheinungswelt. Bei den Fernröhren wäre es theoretisch am richtigsten, den ersten (vorderen) Visier- oder Knotenpunkt des objektiven Linsensystems oder einen entsprechenden Punkt des objektiven Spiegelsystems zum Drehungsmittelpunkte bei den Winkelmessungen zu machen. Nach konstruktiven Gesichtspunkten wird man aber bei den feinsten Winkelmessungen, zumal bei den astronomischen, bei denen es auf kleine Verschiedenheiten der Lage der Drehungsmittelpunkte und des eigentlichen festen Beobachtungsortes gar nicht ankommt, einen Punkt der Fernrohrachse zum Drehungsmittelpunkte machen, der zwischen dem Objektiv- und dem Okularende liegt und die einfachste und vollständigste Ausbalanzierung des Rohres bei beliebigen Lagen zur Richtung der Schwere gestattet.

Wenn die Messung des Winkels zwischen zwei durch einen und denselben Beobachtungsort gehenden Richtungen auf obige einfache Weise erfolgen soll, bedarf es aber besonderer, auch wieder mit Drehungen zur Anwendung zu bringender Vorrichtungen, durch welche die zur Drehungsachse rechtwinklige Ebene des eingeteilten

Kreises zunächst parallel zu der Ebene des zu messenden Winkels gestellt wird.

Die universale Winkelmessung im Anschlusse an die Fixsterne. Das Wesen der Sphärik.

Universaler wird die ganze Aufgabe gelöst, wenn man die oben erwähnten Erleichterungen und Sicherungen konsequent verwertet, wie sie uns die Fixsterne als ideale Objektpunkte, gegen deren Abstände von uns alle Abstände auf der Erde verschwindend klein sind, und deren Ortsveränderungen selber infolgedessen auch unter den minimalsten Winkeln oder Richtungsänderungen für uns erscheinen, in so überaus günstiger Weise darbieten. Darauf, daß wir bei allen gleichzeitigen Messungen auf der ganzen Erde die Entfernungen der Fixsterne als unendlich groß und als unbestimmt einander gleich ansetzen dürfen, also diese Sterne bei allen solchen Messungen als auf einer und derselben Kugelfläche befindlich betrachten dürfen, als deren Mittelpunkt sich jeder Beobachter auf der Erde in einem und demselben Zeitpunkte mit gleichem Rechte ansehen darf, darauf begründet sich das vereinfachte und universale Messungs- und Berechnungs-Verfahren für die Ortsbestimmung im Raume, welches wir als die Sphärik oder die sphärische Trigonometrie bezeichnen.

Die Sphärik stellt in der Tat nicht bloß die erste Entwicklungsstufe der Messungen im Gebiete der Himmels-Erscheinungen dar, die sich für den unmittelbaren Augenschein in der Tat an einer und derselben Kugelfläche zu vollziehen scheinen, in deren Mittelpunkte sich der Beobachter zu befinden wähnt, sondern die Sphärik bildet auch dauernd für die vollkommensten Messungen und Ortsbestimmungen im Raume in dem grundlegenden Anschluß an die Fixsterne, für welche der ganze Erdkörper sich nur als ein Punkt darstellt, das Fundament, von welchem ausgehend auch die Messungen und Ortsbestimmungen in der näheren Erscheinungswelt mit den konvergentesten Annäherungen und in den durchsichtigsten Formen der mathematischen und rechnerischen Behandlung zum Ziele gelangen.

Die sphärische Trigonometrie.

Während die vollständige Lehre von der Ortsbestimmung im Raume erst in der Koordinaten-Lehre von Descartes im 17. Jahrhundert konsequente mathematische und rechnerische Formen erhielt, wurde schon viel früher nicht bloß die Lehre von der Ortsbestimmung in der Ebene in Gestalt der ebenen Trigonometrie, sondern auch die sphärische Trigonometrie als die grundlegende Stufe der Ortsbestimmung im Raume, und zwar schon in der Blüte-

zeit der griechischen Wissenschaft, zu einer gewissen formalen Vollendung entwickelt. Und zwar scheint dieses Verdienst dem großen Astronomen Hipparch von Rhodos (um 140 v. Chr.) zu gebühren. Natürlich sind vereinzelte Entwicklungsstufen auch schon früher in der griechischen, sowie in der babylonischen, der ägyptischen und der ostasiatischen Wissenschaft vorhanden gewesen, z. B. in Gestalt gewisser Zahlen-Paradigmen, wie auch des sogenannten pythagoräischen Lehrsatzes, hauptsächlich aber wohl in Gestalt graphischer Methoden, für welche man bei den Aufgaben der sphärischen Trigonometrie Modelle von Hohlkugeln formte.

Während die ebene Trigonometrie nichts anderes ist als — in der neueren Terminologie ausgedrückt — die der analytischen Geometrie der Ebene angehörende Lehre von den Polar-Koordinaten in der Ebene und ihren Transformationen, ist die sphärische Trigonometrie nichts anderes, als die durch indifferente Gleichsetzung der Radien-Vectoren, entsprechend den oben erörterten, in der Sternwelt obwaltenden Bedingungen, vereinfachte, der analytischen Geometrie des Raumes angehörende Lehre von den Polar-Koordinaten im Raume.

Bei den Anwendungen dieser vereinfachten Lehre von den Polar-Koordinaten im Raume auf die großen astronomischen und geodätischen Ortsbestimmungs-Aufgaben ist es völlig unnötig, wie es um die Mitte des 19. Jahrhunderts auf Grund eines gewissen mathematischen Purismus in den Lehrbüchern der sphärischen Astronomie geschah, jedesmal wieder von den allgemeineren Formeln der analytischen Geometrie des Raumes auszugehen und dann immer wieder die Radien-Vectoren indifferent gleich Eins zu setzen. Es genügt vielmehr und es ist methodisch und pädagogisch das viel rationellere Verfahren, die fundamentale Hypothese der Sphärik auf dem Gebiete der astronomischen und geodätischen Ortsbestimmungen *ein für allemal als erste Näherung* zu Grunde zu legen und somit von den astronomischen Messungsobjekten zunächst anzunehmen, daß sie sich auf einer und derselben kugelförmigen Fläche von einem beliebig großen Radius oder Abstande von uns projizieren.

Dem Winkel zwischen zwei Richtungen am Beobachtungsorte entspricht dann der Bogen größten Kreises der Sphäre zwischen den Punkten, in denen die beiden Richtungen vom Beobachtungsorte, als dem Mittelpunkt der Sphäre, ausgehend die letztere treffen. Jede

Die sphärischen Bogen u. die sphärischen Winkel.

Richtung trifft unter diesen Voraussetzungen die Sphäre in zwei Punkten, gewissermaßen den beiden sphärischen Polen dieser Richtung. Von diesen je zwei Punkten wird derjenige als der sogenannte sphärische Ort des anvisierten Objektpunktes angesehen, welcher vom Beobachtungsorte oder Mittelpunkte der Sphäre aus in der Visierrichtung nach dem Objektpunkt liegt. Nach diesen Festsetzungen hat man dann zunächst nur mit den sphärischen Örtern der anvisierten Objektpunkte zu tun, und die Orientierung der Lage der bezüglichen Visierrichtungen im Raume, zunächst die Bestimmung der Winkel derselben miteinander, erfolgt dann einfach nach den Formeln der sphärischen Trigonometrie, welche nach dem obigen, in Analogie zu der ebenen Trigonometrie, nichts anderes ist, als die Lehre von den Polar-Koordinaten auf einer sphärischen Fläche. Allgemein betrachtet enthalten die Polar-Koordinaten in einer bestimmten Fläche je zwei Bestimmungsstücke zur Charakterisierung der Lage eines Punktes in dieser Fläche, nämlich seinen Abstand von dem in der Fläche gelegenen Ursprunge oder Fixpunkte (Pol) des Koordinaten-Systems, gemessen auf der Fläche in kürzester Linie, und den Winkel, welchen diese kürzeste Linie am Ursprunge mit der Richtung einer nach gewissen Bedingungen festgelegten, durch den Ursprung gehenden kürzesten Linie, der sogenannten Leitlinie, macht. In der Ebene sind die geraden Linien die kürzesten, in der sphärischen Fläche sind es die Bogen größten Kreises, in einer krummen Fläche von beliebigem Gesetze sind es die gemäß dem betreffenden Gesetze ebenso scharf bestimmten sogenannten geodätischen Linien, so daß es neben der ebenen und der sphärischen auch eine allgemeinere und umfassendere geodätische Trigonometrie gibt, welche in dem Falle der Messungen auf unserer Erdoberfläche, die annähernd sphärischen Charakter hat, als sphäroidische Trigonometrie bezeichnet wird.

Ein Ort in einer sphärischen Fläche wird nach obigem festgelegt durch seinen, im Bogen größten Kreises gemessenen Abstand von einem in derselben Fläche gelegenen Ursprung oder Fixpunkt (Pol), ferner durch den Winkel, welchen dieser größte Kreisbogen an dem Pol mit einem, durch den letzteren nach gewissen Bedingungen gelegten, festen größten Kreise macht, den man nach Analogie des allgemeinen Ausdruckes „Leitlinie“ hier auch als den „Leitkreis“ bezeichnen kann. Dieser in der sphärischen Fläche liegende Winkel (oder „sphärische Winkel“, während der Bogen

größten Kreises schlechtweg „sphärischer Bogen“ oder „sphärische Distanz“ heißen kann) ist dem ebenen Winkel gleich, welchen die Tangenten der beiden größten Kreise (hier des Leitkreises und des durch den sphärischen Ort des Objektes gelegten sphärischen Bogens) an dem Schnittpunkte miteinander bilden.

Zur allgemeingültigen Festlegung des sphärischen Ortes eines Objektpunktes ist also die Festlegung eines Polpunktes und eines durch denselben gehenden Leitkreises erforderlich. Man kann diese Bedingung, da die Lage des Leitkreises durch den Polpunkt und einen zweiten Fixpunkt, den man den Leitpunkt nennen kann, vollständig bestimmt ist, auch dahingehend formulieren, daß zur Ortsbestimmung in einer sphärischen Fläche zwei auf derselben gelegene feste Punkte erforderlich sind, von denen der eine als Polpunkt, der andere als Leitpunkt dient. Diese Formulierung entspricht auch der oben im Eingange ausgesprochenen Bedingung, daß zur Festlegung einer Richtung im Raume zwei andere durch einen Punkt derselben gehende feste Richtungen erforderlich sind. Es ist durchaus unzweckmäßig, in der reinen Sphärik der Astronomie auch mit Grundebenen und dergleichen zu operieren, was nur zu unstrengen und sogar unrichtigen, auch weniger anschaulichen Formulierungen Anlaß gibt. Der Polpunkt allerdings ist zugleich der sphärische Ort der durch den Mittelpunkt der Sphäre gelegten Normale zu einer, auch durch diesen Mittelpunkt gehenden Ebene, welche die Grundebene desjenigen Koordinaten-Systems im Raume bildet, in welchem die auf jenen Polpunkt bezogenen sphärischen Polar-Koordinaten des Objektes zugleich mit dem Radius-Vector die Bestimmungsstücke der vollständigen Raum-Koordinaten für das Objekt darstellen. Aber diese Grundebene hat mit den Beziehungen zwischen den rein sphärischen Polar-Koordinaten der Objekte gar nichts zu tun, und es ist durchaus ratsam, in der Sphärik die größten Kreise, welche an der Sphäre gewisse durch den Mittelpunkt gehende Ebenen darstellen, selber möglichst aus dem Spiel zu lassen und nur durch ihre Polpunkte zu repräsentieren.

II.

DIE KOORDINATENSYSTEME UND DIE BEZEICHNUNGEN.

Die sphärischen Koordinatensysteme; Allgemeines.

Bei den nachfolgenden figürlichen Darstellungen der Polar-Koordinaten auf der Kugelfläche und der Transformationen zwischen verschiedenen Systemen derselben, bitte ich noch folgendes über die Unvollkommenheiten dieser meiner graphischen Ausführungen sagen zu dürfen. Für das mathematische Verständnis ist die skizzenhafteste Ausführung derselben ausreichend und der Gesichtspunkt der zeichnerischen Korrektheit ganz und gar nebensächlich. Für die Anschaulichkeit aber muß auch bei der korrektesten Ausführung die Phantasie doch das beste dazu tun.

In der Fig. 2 bezeichne S den sphärischen Ort des Objektes, im Anklange daran, daß die idealen Beobachtungsobjekte im Gebiete der Sphärik die Sterne *(Stellae, Sidera)* sind. Mit V werde der Polpunkt, mit W der Leitpunkt des sphärischen Polar-Koordinaten-Systems bezeichnet. Dann ist VS der in der sphärischen Fläche im Bogen größten Kreises gemessene kürzeste Abstand des Punktes S von dem Polpunkt V, oder die „Poldistanz" des sphärischen Ortes des Objektes, die wir mit σ bezeichnen wollen; ferner kann der sphärische Winkel WVS, den wir kurz mit γ bezeichnen wollen, kurz der „Leitwinkel" heißen.

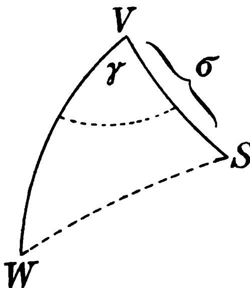


Fig. 2.

Am nächstliegenden wäre es nun, die beiden Fixpunkte V und W mit zwei hellen Fixsternen zu identifizieren, wobei für den Polpunkt-Stern V etwa ein besonders heller und an dem Beobachtungsort nicht untergehender Stern und für den Leitpunkt-Stern W ein ebensolcher zu wählen wäre, der zugleich möglichst weit, bis zu einem Quadranten, von V abstehen sollte; denn es ist ersichtlich, daß die Lage des Leitkreises bei den Messungen am sichersten be-

stimmt wird, wenn $VW = 90^\circ$ ist, und um so unsicherer je kleiner VW ist.

Wenn dann, wie oben, mit Hilfe einer Kreiseinteilung, deren Ebene parallel zu der Ebene der zu messenden Winkel ist, und deren Achse konzentrisch mit der durch den Beobachtungsort (den Mittelpunkt der Sphäre) gehenden Drehungsachse des Visierapparates ist, die einzelnen Winkel (oder Bogen größten Kreises) SV, SW und WV durch sukzessive Einstellungen des Visierapparates auf die Objektpunkte S und V, S und W, W und V, mit jedesmaliger zugehöriger Einstellung der Ebene der Kreiseinteilung in die Ebene des bezüglichen Winkels, gemessen werden könnten, so ergäbe sich aus dem sphärischen Dreieck VWS auch der Leitwinkel γ. Falls dann für einen zweiten Objektpunkt dieselbe Messungsreihe bei derselben Annahme für die Lage von V und W ausgeführt werden könnte, so würde sich, wenn wir den ersten Objektpunkt mit S_1 und seine sphärischen Koordinaten mit σ_1 und γ_1, den zweiten Objektpunkt mit S_2 und seine sphärischen Koordinaten mit σ_2 und γ_2 bezeichnen, der Winkel zwischen der Richtung nach S_1 und der Richtung nach S_2, nämlich die sphärische Distanz S_1S_2 auch aus dem sphärischen Dreieck VS_1S_2 mit Hilfe von σ_1, σ_2 und $\gamma_2 - \gamma_1$ ergeben, anscheinend viel umständlicher als durch die entsprechende direkte Winkelmessung von S_1S_2, aber durch die Bestimmungsstücke σ_1, σ_2, γ_1 und γ_2 würde zugleich die Lage von S_1 und S_2 in dem durch die Fixpunkte V und W bestimmten sphärischen Koordinaten-Systeme und in dem entsprechenden Raum-Koordinaten-Systeme vollständiger angegeben werden. Das ganze vorstehend skizzierte Verfahren wird indessen völlig illusorisch dadurch, daß die Sterne für einen Beobachter auf der Erde nicht „stillhalten“, sondern, infolge der Drehung der Erde um eine im Raume und im Erdkörper nur sehr langsam ihre Lage verändernde Achse, für den Beobachter auf der dem Anschein nach ruhenden Erde sich in Parallelkreisen um einen nahezu ruhenden Pol am Himmel zu bewegen scheinen und dadurch ihre Lage zu Richtungen, die zum Erdkörper eine feste Lage haben, unablässig ändern. Man hat es versucht, bei bloßen sphärischen Distanzmessungen am Himmel zwischen je zwei nicht zum Erdkörper gehörenden Objektpunkten von diesen Wirkungen der Drehung der Erde frei zu werden dadurch, daß man mit zwei in geeigneter Weise kombinierten, sich um eine und dieselbe Achse drehenden Visierapparaten

gleichzeitig je einen der beiden Objektpunkte einstellte, entweder im Zusammenwirken zweier Beobachter (wie bei Tycho Brahes Distanzmessungsapparaten), oder mit Ersetzung des zweiten Beobachters durch einen Spiegelungsapparat (Spiegelsextant, Reflexionskreis, Équatorial coudé). Für die komplizierten Verbindungen von Einstellungen nach obigem hypothetischen Verfahren war aber von der Verwirklichung einer vollen Gleichzeitigkeit zum Zwecke der Elimination der Wirkung der Erddrehung gänzlich abzusehen.

Das sphärische Koordinatensystem der täglichen Drehung.

Als Polpunkt V empfahl sich bei dieser Sachlage offenbar der Polpunkt der scheinbaren täglichen Drehung des Fixsternhimmels selber, welcher, infolge der sehr langsamen und stetigen Veränderungen der Lage der Erdachse im Raume und der noch viel geringeren (bekanntlich erst in dem letzten Jahrzehnt des 19. Jahrhunderts erwiesenen) Veränderungen der Lage dieser Achse im Erdkörper, die entscheidend wichtige Eigenschaft darbot, daß er sowohl am Fixsternhimmel, als zu festen irdischen Richtungen eine in den Anfängen der Beobachtungskunst jahrelang, aber auch für die jetzige Beobachtungsgenauigkeit noch stundenlang als unverändert anzusehende Lage hat, und daß seine langsamen Lagenänderungen mit einer den jetzigen Genauigkeitsforderungen vollauf genügenden Schärfe und Sicherheit mehrere Jahrzehnte lang in Rechnung gestellt werden können.

Als Leitpunkt W wird mit diesem Polpunkt bei denjenigen sphärischen Koordinatenangaben, welche bei den Orts- und Bewegungsbestimmungen außerhalb der Erde zur Anwendung kommen, der Polpunkt der jeweiligen mittleren Lage derjenigen Bahnebene verbunden, in welcher die Erde sich um die Sonne bewegt. Die Lage dieser Ebene im Raume und die entsprechende Lage ihres Poles an der Himmelsfläche ist auch nicht völlig unveränderlich, aber die Lagenänderungen sind noch etwas geringer und mit noch etwas größerer Sicherheit, als die Lagenänderungen des Poles der täglichen Drehung, für mehrere Jahrzehnte vorwärts und rückwärts berechenbar. Wir wollen fortan den Ort des Poles der täglichen Drehung am Himmel mit P (im besonderen Sinne heißt Polus der Drehzapfen) und den Ort des Poles der jährlichen Bewegung der Erde mit E bezeichnen. (Die Benennung der Bahnebene der Erde als „Ekliptik“, auf welche dieses E in der griechisch-lateinischen Terminologie hinweist, rührt bekanntlich davon her, daß die Annäherung des Mondes an den größten Kreis am Himmel, in welchem



diese Bahnebene die Sphäre schneidet, die „Ekleipsis“ seines Lichtes, d. h. die „Auslassung“ eines Teiles seiner Lichtwirkungen oder derjenigen der Sonne, nämlich die Finsternisse, bedingte.)

Bei den Orts- und Bewegungsbestimmungen innerhalb unseres Planetensystems ist im Hinblick auf die nahe Übereinstimmung der Lage der meisten und der wichtigsten Planetenbahnebenen mit der Erdbahnebene ein sphärisches Polar-Koordinatensystem in Gebrauch, dessen Polpunkt der Pol E der Ekliptik und dessen Leitpunkt der Pol P der täglichen Drehung bildet; doch hat dieses System jetzt nur noch eine rechnerische Bedeutung.

Bei denjenigen sphärischen Koordinatenangaben sodann, welche für Orts- und Bewegungsbestimmungen auf der Erde und für die Orientierung von Meßinstrumenten in Verbindung mit den Orts- und Bewegungsbestimmungen der Gestirne zur Anwendung kommen, wird als Leitpunkt in Verbindung mit dem Polpunkt der täglichen Drehung derjenige Punkt an der Himmelsfläche angenommen, in welchem die nach oben verlängerte Lotrichtung, die zu dem Beobachtungsorte gehört, die Sphäre trifft. Dieser in der arabischen Astronomie „Zenit“ benannte Punkt soll im folgenden mit Z bezeichnet werden. Die Lotrichtung, als die Resultante aus den sämtlichen am Beobachtungsort wirksamen Massenanziehungskräften und den Wirkungen der Drehung der Erde, hat zwar zum festen Erdkörper ebensowenig eine vollkommen unveränderliche Lage, wie die Drehungsachse; denn diese Resultante wird in ihrer Lage durch alle Ortsveränderungen, welche die durch ihre Massenanziehung zusammenwirkenden Massen in bezug auf den Beobachtungsort erfahren, beeinflußt, also durch die Stellungsänderungen der Himmelskörper, durch die Strömungen in den Gewässern und in der Atmosphäre, durch die Ebbe und Flut, vielleicht auch durch Veränderungen der Massenverteilung unterhalb der Erdoberfläche, sogar durch stärkere bauliche und konstruktive Veränderungen in der nächsten Umgebung des Beobachtungsortes. Vermeidet man jedoch Orte mit ungewöhnlich starken Ebbe- und Fluterscheinungen oder ungewöhnlichen Schwankungen der unterirdischen Zustände, wie sie an vulkanischen Erscheinungen erkennbar sind, so kann man ziemlich sicher sein, daß die Lotrichtung ihre Lage zum festen Erdkörper innerhalb mehrerer Jahrzehnte höchstens um wenige Hundertel der Bogensekunde ändert. Die Amplitüde dieser Schwankungen ist noch etwas geringer, wenn man die jeweiligen Wirkungen der

Anziehung des Mondes und der Sonne auf die Lotrichtung, je nach deren Stellungen zum Horizonte des Beobachtungsortes, direkt in Rechnung stellt.

Das sphärische Koordinatensystem der Lotrichtung und die Zeitmessung.

Für diejenigen Orientierungen auf der Erde, bei denen die sphärischen Koordinaten der Gestirne nur Hilfselemente sind, kommt sodann ein sphärisches Koordinatensystem zur Anwendung, bei welchem Z den Polpunkt und P den Leitpunkt bildet. Dieses System, das Lot- oder Niveausystem, auch Horizontalsystem genannt, weil die Niveau- und Horizontalebene genau rechtwinklig zum Lot ist, hat für die Messungen eine besondere Bedeutung auch dadurch, daß die Lotrichtung, welche sich ja unmittelbar darstellt als die Ruhelage eines einfachen Fadenpendels, auch durch die Niveauflächen der Flüssigkeiten als Einfallslot für optische Reflexionswirkungen mit sehr großer Genauigkeit im Augenblick ersichtlich gemacht werden kann, während die absolute Bestimmung der Richtung zum Polpunkt der täglichen Drehung und seines Ortes an der gestirnten Himmelsfläche eine Zwischenzeit von mindestens einem halben Tage und die absolute Bestimmung der Richtung zum Polpunkt der jährlichen Bewegung und seines Ortes an der gestirnten Himmelsfläche eine Zwischenzeit von mindestens einem halben Jahre beansprucht.

Der Ort des Zenits an der sphärischen Fläche des Sternhimmels ist natürlich infolge der Drehung der Erde unablässig veränderlich.

Der Übergang von den Systemen mit den beiden Fixpunkten P und Z, von denen der eine (P) (in dem oben dargelegten Sinne) eine relativ feste Lage sowohl am Sternhimmel als zum Erdkörper, der andere (Z) nur zum Erdkörper hat, auf die Systeme mit den beiden Fixpunkten P und E, von denen der letztere (E) in dem oben dargelegten Sinne relativ feste Lage nur zum Sternhimmel hat, erfordert also die jeweilige Kenntnis des veränderlichen Ortes von Z in den Systemen P und E oder des scheinbaren veränderlichen Ortes von E in den Systemen P und Z.

Das Gesetz der mit der Drehung der Erde verbundenen Änderungen der Koordinaten des Zenits (Z) eines Beobachtungsortes im System P und E, als Funktion der Zeit, d. h. ausgedrückt durch seine Beziehungen zu einem absolut gleichförmigen Bewegungsverlauf, der nirgends existiert, ist in seinen letzten Feinheiten wohl ein äußerst hypothetisches und verwickeltes. Zum Glück für die Menschheit erfolgt diese Ortsveränderung von Z an der gestirnten

Himmelsfläche, bei fast vollkommener Konstanz des Abstandes PZ, in so nahe ideal gleichförmiger Weise, daß bis jetzt durch unsere feinsten künstlichen Zeitmessungsmittel (die Pendeluhren) und durch die Vergleichungen der Umdrehungszeiten der Erde mit anderen Umdrehungs- und Umlaufszeiten im Himmelsraume noch keinerlei Spur einer Abweichung von einem völlig gleichmäßigen Verlaufe zweifellos erkennbar geworden ist, so daß der Verlauf dieser Bewegung, wie seit uralten Zeiten der Menschheit, noch immer schlechtweg selber als das Maß der Zeit gilt. Durch möglichst unablässige Beobachtung der Angaben von möglichst vollkommenen Zeitmessungsapparaten bei der Wiederkehr bestimmter Koordinaten des Zenits im System P und E gelingt es nun allmählich, für die Zwischenzeiten zwischen diesen Beobachtungen und auch bereits für einige Tage im voraus bis zu der nächsten entsprechenden Beobachtung oder „Zeitbestimmung“ die jeweilige Kenntnis des sphärischen Winkels EPZ, also des Winkels zwischen dem Leitkreise im System P und E und dem Leitkreise im System P und Z bis auf kleine Bruchteile der Bogensekunde zu verbürgen und damit die, bei den feinsten Ortsbestimmungen am Himmel und auf der Erde auch sonst allmählich erreichbar gewordene Genauigkeit auch für den Übergang von einem dieser Systeme auf das andere zu sichern. Einiges nähere hierüber weiter unten.

III.

DIE SPHÄRISCHEN KOORDINATENMESSUNGEN.

Die sphärische Koordinatenmessung mit dem universalen sphärischen Meßinstrument.

Mit welchen Einrichtungen instrumentaler Art bestimmt man nun aber für irgend einen Objektpunkt S an der Himmelsfläche (also auch für Z im Systeme P und E oder für E im Systeme P und Z) die sphärischen Koordinaten σ und γ (oder VS und WVS mit Wiederaufnahme der obigen allgemeinen Bezeichnungen V und W für den Polpunkt und für den Leitpunkt), nachdem das oben er-

örterte elementare Verfahren der bloßen Messung von Distanzen an der Himmelsfläche sich infolge der unablässigen scheinbaren Drehung des Sternhimmels als ohne große Weiterungen nicht durchführbar erwiesen hat?

Um zunächst den Abstand (im Bogen größten Kreises) *VS*, in einem beliebigen Winkel *WVS* gegen den Leitkreis *WV*, zu messen, muß man dem Visierapparat eine mit Hilfe eines eingeteilten Kreises meßbare Drehung um eine (rechtwinklig und konzentrisch zu einem solchen, durch *V* gehenden, Kreise gelagerte) Achse geben, welche selber um eine andere, rechtwinklig zu ihr gestellte und durch *V* gehende (oder der Richtung nach dem Polpunkte des Systems parallele) Achse drehbar ist, deren Drehungen dann ebenfalls durch einen zu ihr rechtwinklig und konzentrisch liegenden eingeteilten Kreis meßbar sein müssen. Mit Hilfe dieser letzteren Drehung kann man dann auch die Drehung des Visierapparates sukzessiv in die Richtung der größten Kreise *VS* und *VW* bringen und den Apparat auf *S* und auf *W* einstellen. Der Unterschied zwischen derjenigen Phase der Drehung um die nach *V* gerichtete Achse, bei welcher man auf *S* visiert hat, und derjenigen Phase der Drehung um die nach *V* gerichtete Achse, bei welcher man auf *W* visiert hat, ergibt dann den sphärischen Winkel *WVS*.

In dem Zusammenwirken der Drehungen um diese beiden Achsen, von denen die nach *V* hin gerichtete und in festen Lagern zu bettende die Hauptachse oder erste Achse des Instrumentes bildet, während die, rechtwinklig zur Hauptachse gerichtete, zweite Achse sich um die Hauptachse bewegt und der Visierapparat, den man auch die Visierachse des Instrumentes nennen kann, sich um die zweite Achse dreht, hat man in Verbindung mit den beiden zugehörigen Kreiseinteilungen das Schema eines vollständigen oder universalen Meßapparates für sphärische Koordinaten.

Die Anwendung der Kreisablesungen.

Wir wollen nun feststellen, in welcher Weise aus den Kreisablesungen, die sich in den verschiedenen Phasen der Drehungen um die beiden Achsen ergeben, die sphärischen Koordinaten des Objektes *S* im System *V* und *W*, nämlich *VS* und *WVS* (σ und γ) gefunden werden, und zwar zunächst unter der Voraussetzung, daß die erste Achse genau auf *V* gerichtet ist, daß ferner die zweite

Achse genau rechtwinklig zu der ersten Achse und daß endlich die Visierachse genau rechtwinklig zu der zweiten Achse gerichtet ist.

Die Ablesungen des Kreises, welcher die Drehungen um die erste Achse mißt, mögen mit G, die Ablesungen des Kreises, welcher die Drehungen um die zweite Achse mißt, mit S bezeichnet werden.

Wenn jetzt die Visierachse durch Zusammenwirken von Drehungen um die erste und um die zweite Achse des Instrumentes auf das Objekt S gerichtet wird, wobei sich die Ablesung G an dem zu der ersten Achse gehörigen Kreise und die Ablesung S an dem zu der zweiten Achse gehörigen Kreise ergeben hat, so kommt es nun darauf an, diejenige Ablesung S^0 des letzteren Kreises zu ermitteln, bei welcher die Visierachse durch Drehung um die zweite Achse auf den Polpunkt V gerichtet ist, sodann diejenige Ablesung G^0 des ersteren Kreises, bei welcher der größte Kreis, den der sphärische Ort der Visierachse bei ihrer Drehung um die zweite Achse beschreibt, mit dem Leitkreise VW zusammenfällt. Man sieht sofort, daß unter den gemachten Voraussetzungen

$$\sigma = VS = S - S^0$$

$$\text{und } \gamma = WVS = G - G^0$$

wo beispielsweise angenommen ist, daß die Bezifferungen der Ablesungen an dem zweiten Kreise beim Übergange von der Einstellung der Visierachse auf den Polpunkt V zu der Einstellung der Visierachse auf den Objektpunkt S hin zunehmen, und daß dasselbe an dem ersten Kreise geschieht, wenn der von dem sphärischen Orte der Visierachse bei der Drehung um die zweite Achse beschriebene größte Kreis von der mit VW zusammenfallenden auf die mit VS zusammenfallende Lage übergeht.

Die Bestimmung der beiden Ablesungen S^0 und G^0, gewissermaßen der Nullpunkte der beiden Kreisablesungen, wäre unter den obigen Voraussetzungen sehr einfach, wenn man die Visierachse unmittelbar auf den Polpunkt V einstellen könnte, und wenn man entsprechend durch den Visierapparat konstatieren könnte, in welcher Drehungsphase der ersten Achse der Leitpunkt W durch Drehung um die zweite Achse eingestellt werden kann.

Da nun aber von den für die Wahl zu Polpunkten V und zu Leitpunkten W in Frage kommenden natürlichen Fixpunkten E, P und Z nur Z (oder vielmehr sein Gegenpunkt, der Nadir) unmittelbar durch Reflexions-Beobachtungen an Niveauflächen mit der Visierachse eingestellt werden kann, ist eine vollständige sphäri-

sche Koordinaten-Bestimmung in obiger elementaren Weise nicht möglich. Es muß vielmehr generell in folgender Weise verfahren werden, wobei auch die obige ideale, aber niemals in aller Strenge und für die Dauer zu erfüllende Voraussetzung, daß der Pol der ersten Achse des Instrumentes mit dem Polpunkte V des Koordinaten-Systems zusammenfällt, daß ferner die zweite Achse genau rechtwinkelig zu der ersten und daß die Visierachse genau rechtwinkelig zu der zweiten Achse gerichtet sei, aufgegeben und durch allgemeingültigere Annahmen ersetzt werden muß.

Die Unterscheidung der natürlichen und der instrumentalen Koordinatensysteme.

In Fig. 3 stelle generell, wie bisher, V den Polpunkt, W den Leitpunkt eines der oben näher erläuterten, durch natürliche Fixpunkte gegebenen Koordinatensysteme an der sphärischen Himmelsfläche dar. Es bedeute ferner J den einen der beiden Punkte, in welchem die Verlängerung der ersten oder Hauptachse des Instrumentes die Sphäre trifft, sowie K den einen der beiden Punkte, in welchem die Verlängerung der zweiten Achse des Instrumentes die Himmelsfläche trifft.

Bisher ist in unserer Darlegung bei den Fixpunkten E, P, Z von dieser Dualität der sphärischen Orte jeder durch diese Fixpunkte an der Himmelsfläche repräsentierten und durch den Beobachtungsort als den Mittelpunkt der Himmelskugel gelegten Richtung, nämlich der Lotrichtung, der Parallele zur Erdachse und der Parallele zu einer durch den Erdmittelpunkt rechtwinklig zur Erdbahnebene angenommenen Richtung, nicht die Rede gewesen. Es ist einfach angenommen worden, daß von den beiden Polen der Erdbahnebene und von den beiden Polen der Drehung der Erde, schließlich auch von den beiden Polen der Niveau- oder Horizontalebene (Zenit und Nadir) nur derjenige ohne weiteres in Frage kommt, der sich über dem Horizonte des Beobachtungsortes befindet. Dasselbe gilt auch für den Pol J der Hauptachse des Instrumentes, der ja möglichst nahe mit dem Polpunkte V (also einem der Fixpunkte E, P, Z) zusammenfallen soll, welcher selber in Verbindung mit dem Leitpunkt W auch das System des Instrumentes maßgebend bestimmt. Nur hinsichtlich der beiden sphärischen Orte der Richtung der zweiten Achse des Instrumentes ist im Interesse der Eindeutigkeit eine ausdrückliche Unterscheidung zu machen, und zwar möge K den sphärischen Ort desjenigen Endes der zweiten Achse bezeichnen, welches durch besondere Kennzeichen, z. B. als das Kreisende oder Klemmende derselben, markiert wird.

Es ist zunächst (siehe Fig. 3) die Lage des Objektes S zu den beiden Achsenpolen (J und K) des instrumentalen Systems, zugleich mit der Lage des diese beiden Achsenpole verbindenden größten Kreises JK zu dem größten Kreise JW, welcher den Instrumentalpol J mit dem natürlichen Leitpunkt W verbindet, zu bestimmen, sodann die Bestimmung und Berücksichtigung der Lage des Poles J zu dem natürlichen Polpunkte V und des den instrumentalen Pol J mit dem natürlichen Leitpunkt W verbindenden Leitkreises JW zu dem natürlichen Leitkreise VW zu erörtern, woraus sich dann schließlich die gesuchte Bestimmung der Lage von S im natürlichen System $V \& W$ ergibt.

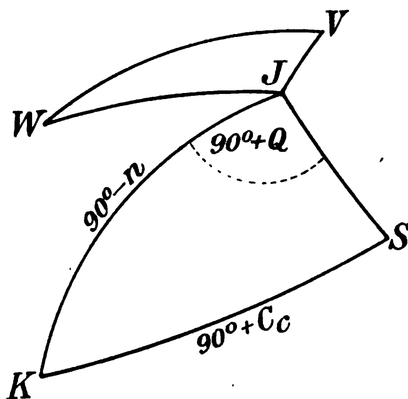


Fig. 3.

Die Unvollkommenheiten der Instrumente und deren Berücksichtigung.

Während nach der obigen idealen Forderung die zweite Achse des Instrumentes zu seiner ersten Achse und die Visierachse zu der zweiten Achse genau rechtwinklig sein sollte, wird man im allgemeinen annehmen müssen, daß diese Bedingungen nur näherungsweise erfüllt sein können, da selbst dann, wenn man ihre genaue Erfüllung einmal erreicht hat, schon in kurzer Zeit infolge von Temperaturwirkungen und elastischen Nachwirkungen, und weiterhin durch Oxydationen, Friktionseinflüsse auf die Gestaltverhältnisse von Berührungsflächen und dergl. die genaue Berichtigung wieder gestört sein kann. Man wird deshalb allgemein setzen müssen

$$JK = 90^\circ - n \qquad S = 90^\circ + C$$

wobei man fordern und erreichen kann, daß n eine sogenannte kleine Größe erster Ordnung, d. h. eine solche Größe ist, deren zweite und höhere Potenzen verschwindend klein sind, und daß C, welchem Winkelbetrage wegen der Möglichkeit und Nützlichkeit einer Einstellung des Bildes des Objektpunktes S an einer größeren Zahl von verschiedenen Stellen der mit mikrometrischen Einteilungen versehenen Bildfläche des Fernrohrs ein etwas größerer Spielraum zu geben ist, eine kleine Winkelgröße ist, deren dritte und höhere Potenzen verschwindend klein sind. In betreff der Vernachlässigung

der höheren Potenzen von Winkelgrößen und der hierdurch zu erreichenden rechnerischen Vereinfachungen werden weiterhin einige allgemeinere Bemerkungen und numerische Festsetzungen folgen.

Bevor wir nun an die Darlegung der Anwendung eines solchen Instrumentes gehen, wie es schematisch in Fig. 3 dargestellt ist, möge noch folgendes hinsichtlich der Bezeichnungen, in Vervollständigung des bereits zu Fig. 2 gesagten, festgesetzt werden. Analog zu den obigen Bezeichnungen der sphärischen Koordinaten von S im natürlichen System V & W, nämlich $VS = \sigma$ $WVS = \gamma$, sollen für die sphärischen Koordinaten von S im System J und W die folgenden Ausdrücke gelten: $JS = s$ $WJS = g$, während die Ablesungen an den beiden Kreisen des Instrumentes oben bereits ganz entsprechend mit S (an dem Kreise der zweiten Achse) und mit G (an dem Kreise der ersten Achse) bezeichnet wurden. Aus den Ablesungen S gehen die Koordinaten s und aus diesen, mit Hilfe der Ermittelung der Lage von J zu V, die Koordinaten σ hervor, ebenso aus den Ablesungen G die Koordinaten g und sodann die Koordinaten γ. Das Prinzip, welches auch weiterhin noch zur Anwendung kommen und in die unvermeidliche Vielartigkeit der Bezeichnungen einiges System bringen wird, besteht also darin, daß die ersten Stufen der Koordinatenmessung mit den großen lateinischen, sodann die instrumentalen Koordinaten mit den kleinen lateinischen und endlich die gesuchten Koordinaten in dem betreffenden natürlichen System mit den kleinen griechischen Buchstaben homolog bezeichnet werden.

Wenn nun die Visierachse durch Drehung um die zweite Achse und durch die hinzukommende Drehung des ganzen Instrumentes um die Hauptachse auf das Objekt S eingestellt ist, werde wieder an dem Kreise zu K die Ablesung S und an dem Kreise zu J die Ablesung G gemacht.

Bei der Drehung um die Achse, deren Pol K ist, beschreibt die jeweilige Visierachse, welche mit der ersteren nach der obigen Annahme den Winkel $90^\circ + C$ macht, zum Pole K einen Parallelkreis, welcher von dem größten Kreise, dessen Pol K ist, um C absteht. Wir wollen aber für die folgenden allgemeineren und elementaren Darlegungen über die Anwendung des vorliegenden Instrumentes von der oben erörterten Vielheit der Winkelgrößen C zunächst abstrahieren und die Visierachse nur eindeutig durch einen und zwar einen centralen Bildpunkt bestimmen, der in der Mitte der Mikro-

metereinrichtungen der Bildfläche und nahezu auch in der optischen Achse des Fernrohrs liegen soll. Für alle Objektpunkte, deren Bildpunkte mit diesem Mittelpunkte zusammenfallen, und auf welche dann in besonderem Sinne das Fernrohr oder die Visierachse als eingestellt gilt, sei KS allgemeingültig ausgedrückt durch $90^{\circ} + C_c$, wobei dann C_c als eine Winkelgröße erster Ordnung in obigem Sinne gelten darf. In einer bestimmten Phase der Drehung der auf diese Weise eindeutig definierten Visierachse um die Achse K wird der sphärische Ort der Visierachse den größten Kreis KJ (oder seine Verlängerung über J hinaus) passieren. Diejenige Ablesung des Kreises zu K, bei welcher diese Lage der Visierachse stattfindet, wollen wir, zunächst hypothetisch, mit S_i bezeichnen. Der Winkel JKS in dem gleichnamigen sphärischen Dreieck hätte dann den Ausdruck

$$\pm (S - S_i)$$

wo das obere Zeichen gilt, wenn die Bezifferung des Kreises zu K beim Übergang von der Drehungsphase S_i auf die Einstellung des Objektes S zunimmt. Dies würde nach Fig. 3 der Fall sein, wenn die Kreisablesung wächst bei einer Drehung der Visierachse, die, von K aus gesehen, im Sinne der Uhrzeigerbewegung vor sich geht. Wir wollen dies beispielsweise hier annehmen. (Man sieht übrigens leicht, daß, wenn die Winkelgrößen n und C_c positiv sind, der verlängerte größte Kreisbogen KJ von der Visieraxe an einer Stelle passiert wird, deren Abstand von J gleich $(90^{\circ} + C_c) - (90^{\circ} - n) = C_c + n$ ist.)

Der Winkel KJS in dem vorliegenden sphärischen Dreieck würde genau gleich 90° sein, wenn C_c und n gleich Null wären. Wir wollen ihn mit $90^{\circ} + Q$ bezeichnen, und es ist klar, daß dann Q eine Funktion von C_c und n, sowie von $(S - S_i)$ sein wird.

Es gelten nämlich mit allen diesen Bezeichnungen in dem Dreieck JKS die folgenden 3 Grundgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \sin s \cos Q &= \cos C_c \sin (S - S_i) \\ \sin s \sin Q &= \sin C_c \cos n + \cos C_c \sin n \cos (S - S_i) \\ \cos s &= -\sin C_c \sin n + \cos C_c \cos n \cos (S - S_i) \end{aligned}\right\} A.$$

Hieraus zunächst:

$$\operatorname{tang} Q = \sin n \operatorname{cotg} (S - S_i) + \operatorname{tang} C_c \cos n \operatorname{cosec} (S - S_i).$$

Man sieht aus diesen Gleichungen, daß, wenn es gelingt, aus den Ablesungen an den Kreisen zunächst S_i und sodann auch Q

zu bestimmen, Bedingungsgleichungen zwischen den Werten s, S, C_c und n sich ergeben, die zur Ermittelung von s und zugleich zur Kenntnis von C_c und n führen können. Hierzu betrachten wir zunächst noch die Verwertung der Ablesungen G des ersten Kreises. Nach obiger Fig. 3, wenn beispielsweise die Bezifferungen der Ablesungen G des ersten Kreises (zur Achse, deren Pol J ist) zunehmen, sobald der größte Kreis JK (der die Pole der beiden Achsen verbindet) von J aus hinabblickend betrachtet sich gegen den Sinn der Drehung der Uhrzeiger um J bewegt, und wenn die Koordinaten g am Pole J in demselben Sinn gezählt werden, wie die Ablesungen G, haben wir folgenden Ausdruck für g:

$$\begin{aligned} g = WJS &= WJK + KJS \\ &= G - G_w + 90^\circ + Q, \end{aligned}$$

wo mit G_w diejenige Kreisablesung, zunächst hypothetisch, bezeichnet wird, bei welcher der größte Kreis JK mit dem größten Kreise JW zusammenfällt.

Die Bestimmung des Polpunktes und der Instrumentalfehler mit Hilfe des Einstellungspaares.

Auch hieraus ergeben sich zunächst nur hypothetische Beziehungen für Q. Entscheidende Hilfe kommt nun aber durch die Erwägung, daß es noch eine zweite Verbindung gewisser Drehungsphasen um die Achsen J und K, sowie der zugehörigen Kreisablesungen gibt, bei welcher die Visierachse ebenfalls auf das Objekt S eingestellt werden kann.

Wie Fig. 4 erkennen läßt, kann dies unter der Voraussetzung,

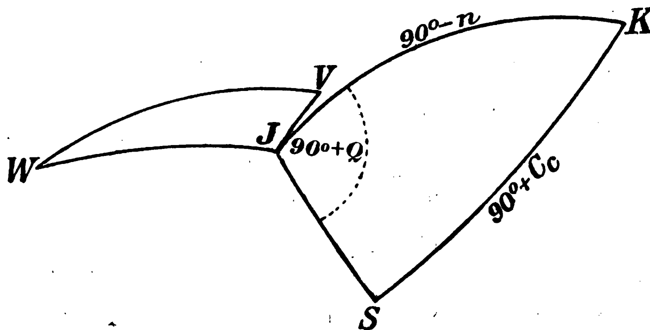


Fig. 4.

daß der Objektpunkt S in der Zwischenzeit eine unveränderte Lage zu den Fixpunkten J und W behalten hat, in einer Drehungsphase des Instrumentes um die Achse J geschehen, bei welcher der Winkel

des größten Kreises *JK* mit dem Leitkreise *JW* nahezu um 180° verschieden ist von der in Fig. 3 dargestellten Lage, und zugleich in einer Drehungsphase der Visierachse um die Achse *K*, bei welcher der Winkel des größten Kreises *KS* mit dem größten Kreise *KJ* nahezu derselbe ist, wie in Fig. 3, aber hinsichtlich der Kreisablesung nach der entgegengesetzten Seite von *KJ* liegt, als in Fig. 3. Insofern man nach der obigen Voraussetzung annehmen darf, daß die Kreisablesung, bei welcher der sphärische Ort der Visierachse den größten Kreis *KJ* passiert, dieselbe geblieben ist, wie bei der in Fig. 3 dargestellten Lage des Instrumentes, nämlich unverändert gleich S_i ist, würde also bei der in Fig. 4 dargestellten Lage des Instrumentes die Kreisablesung für die Einstellung der Visierachse auf den unverändert gebliebenen Objektpunkt *S* nahezu symmetrisch in bezug auf S_i liegen zu der in der Lage nach Fig. 3 gefundenen Kreisablesung *S*. Daß diese letztere Symmetrie eine genaue ist, wird sogleich zu beweisen sein.

Vorher ist es jedoch nunmehr erforderlich, in den Kreisablesungen durch besondere Bezeichnungen die beiden Fälle (Fig. 3 und Fig. 4) auseinanderzuhalten.

Wir wollen die in Fig. 3 dargestellte Lage des Instrumentes, bei welcher nach den oben gemachten Annahmen in betreff der Zählungsrichtungen bei den sphärischen Winkeln und bei den zugehörigen Kreisablesungen der größte Kreis *JK* nahezu um 90° nach der Seite der kleineren Kreisablesungen hin von dem größten Kreise *JS* absteht, als Lage I (*K* folgend) betrachten und die Kreisablesungen, die in dieser Lage bei der Einstellung der Visierachse auf das Objekt *S* gemacht werden, mit S' und mit G' bezeichnen; dagegen wollen wir die in Fig. 4 dargestellte Lage als Lage II (*K* vorangehend) betrachten, und die Kreisablesungen, die in dieser Lage bei der Einstellung der Visierachse auf das Objekt *S* gemacht werden, mit S'' und G'' bezeichnen.

Es ist dann gemäß den obigen Darlegungen nach Fig. 3 der Winkel

$$JKS \text{ gleich } S' - S_i$$

und nach Fig. 4 der Winkel

$$JKS \text{ gleich } S_i - S''.$$

Zugleich folgt aber aus dem, nach allen obigen Voraussetzungen bei der Drehung um *J* unverändert gebliebenen, sphärischen Drei-

eck JKS, daß in den beiden Lagen auch die beiden Winkel JKS und KJS ungeändert bleiben, da die drei Seiten des Dreiecks $90^0 + C_c$, $90^0 - n$ und s als unverändert angenommen werden.

Es ist hiernach

$$S' - S_i = S_i - S''$$

somit

$$S_i = \frac{1}{2}(S' + S''),$$

ferner ist $90^0 + Q$ in beiden Lagen übereinstimmend.

Nun ist, wie oben schon erörtert (mit Eintragung von G' statt G) in der Lage I:

$$g = G' - G_w + 90^0 + Q,$$

während nach Fig. 4:

$$g = G'' - G_w - (90^0 + Q),$$

so daß, wenn man nach obigen Voraussetzungen auch g und G_w als ungeändert annimmt:

$$Q = \frac{1}{2}[G'' - G' - 180^0].$$

Mit Hilfe der Einstellungen und Kreisablesungen in den beiden Lagen des Instrumentes, also eines sogenannten Einstellungspaares, kennen wir jetzt S_i und Q, und die obige Gleichungsgruppe A vermag uns nunmehr in der Gleichung für tang Q, eine Bedingungsgleichung zwischen S, n und C_c zu liefern, welche, wie wir sehen werden, nach der dritten Gleichung der Gruppe A auch den Übergang von den Kreisablesungen S auf die gesuchte Koordinate s ermöglichen wird, sobald durch mindestens zwei Gleichungen von der Form tang Q für verschiedene Objektpunkte und verschiedene zugehörige Kreisablesungen S die beiden Winkelgrößen C_c und n eine gesonderte Bestimmung gefunden haben.

Hinsichtlich der Ermittelung der Koordinate g ersieht man aus den beiden obigen Gleichungen für Lage I und Lage II, daß im Mittel aus den Ergebnissen eines Einstellungspaares Q eliminiert und einfach gefunden wird:

$$g = \frac{1}{2}(G' + G'') - G_w.$$

Bei einseitigen Beobachtungen aber wird der Wert von Q, der sich nach den obigen Gleichungen ebenfalls aus dem Einstellungspaar ergab, in Rechnung gestellt, und es ist dann

$$g = G' + Q + 90 - G_w$$

und ebenso $$g = G'' - Q - 90^0 - G_w.$$

In betreff der Bestimmung von G_w muß näheres für die einzelnen Koordinatensysteme, je nach der Besonderheit des natürlichen Leitpunktes W und seiner Einstellbarkeit mit den Einrichtungen des Instrumentes vorbehalten werden. Bezeichnet man $90^0 - G_w$ kurz mit $\varDelta G$, so hat man

$$g = G' + \varDelta G + Q$$

und $$g = G'' - 180^0 + \varDelta G - Q.$$

Betrachten wir jetzt die Gleichung für tang Q etwas näher, so ergibt sich folgendes Verfahren zur gesonderten Bestimmung von C_c und n, sobald durch ein Einstellungspaar auf ein Objekt S_1 der Wert von Q_1 aus der Gleichung

$$Q_1 = \tfrac{1}{2}(G_1'' - G_1' - 180^0)$$

und durch ein anderes Einstellungspaar auf ein Objekt S_2 der Wert von Q_2 aus der Gleichung

$$Q_2 = \tfrac{1}{2}(G_2'' - G_2' - 180^0)$$

ermittelt worden ist, wenn wir noch die aus denselben Einstellungspaaren ermittelten Werte

$$S_1' - S_i = S_i - S_1'' = \tfrac{1}{2}(S_1' - S_1'')$$

kurz mit K_1 und

$$S_2' - S_i = S_i - S_2'' = \tfrac{1}{2}(S_2' - S_2'')$$

kurz mit K_2 bezeichnen:

$$\sin K_1 \operatorname{tang} Q_1 = \sin n \cos K_1 + \operatorname{tang} C_c \cos n$$
$$\sin K_2 \operatorname{tang} Q_2 = \sin n \cos K_2 + \operatorname{tang} C_c \cos n.$$

Hieraus:

$$\sin n = \frac{\sin K_1 \operatorname{tang} Q_1 - \sin K_2 \operatorname{tang} Q_2}{\cos K_1 - \cos K_2}$$

und

$$\operatorname{tang} C_c = \frac{\sin K_2 \operatorname{tang} Q_2 \cos K_1 - \sin K_1 \operatorname{tang} Q_1 \cos K_2}{\cos n (\cos K_1 - \cos K_2)}$$

Man sieht, wie die Genauigkeit, mit der hier $\sin n$ und tang C_c ermittelt wird, außer von der Genauigkeit der Messung von K_1, K_2, Q_1, Q_2 mit Hilfe der Kreisablesungen S_1', S_1'', G_1', G_1'' und S_2', S_2'', G_2' und G_2'', wesentlich von der Größe des Divisors $\cos K_1 - \cos K_2$

abhängt, d. h. von der größtmöglichen Annäherung des Unterschiedes zwischen cos K_1 und cos K_2 an den erreichbaren Maximalwert. Man wird also womöglich das eine Einstellungspaar mit Hilfe eines Objektes ausführen, welches sich in der Nähe des Poles J des instrumentalen Koordinatensystems, also z. B. bei einem sehr kleinen Werte von K_1, befindet, und das andere Einstellungspaar mit Hilfe eines Objektes, für welches dann K_2 möglichst nahe 90°, unter Umständen auch mehr als 90° betragen muß.

Die rechnerische Berücksichtigung der Instrumentalfehler.

Die nähere Verwertung und Berücksichtigung dieser Bestimmungen von n und C_c, insbesondere auch bei der Ermittelung von s, bietet nun Anlaß, die oben vorbehaltene Erörterung über die Zulässigkeit der Vernachlässigungen der zweiten und höheren Potenzen von Winkelgrößen hier einzufügen, sowie zugleich die unerläßlichen Unterscheidungen zur Sprache zu bringen zwischen denjenigen Winkelgrößen, in denen die kürzesten Linien in der Kugelfläche, nämlich die Bogen größten Kreises, ausgedrückt werden, und andrerseits den Ausdrücken der sphärischen Winkel selber, also hier der Koordinaten g und der Winkel K und Q.

Wenn man zunächst die in obigen Gleichungen gefundenen Werte von C_c und von n in die dritte Gleichung der Gruppe A einträgt, findet man die Poldistanz $JS = s$ in Funktion von $\pm (S - S_i)$; doch ist der hieraus abzuleitende Ausdruck für die gesuchte Koordinate s sehr schwerfällig, und es läßt sich sehr leicht ersehen, daß diese Berechnung bedeutend abgekürzt und durchsichtiger gemacht werden kann, wenn man von der oben geforderten und bei der Einrichtung und Ausführung des Instruments sehr wohl zu realisierenden Einschränkung der Winkelgrößen C_c und n auf gewisse kleine Beträge den gehörigen Vorteil zieht.

Bezeichnet man die an $\pm (S - S_i)$ oder (nach obigem abgekürzten Ausdruck) an K anzubringende Verbesserung, durch welche man die Poldistanz s findet, mit ΔK, so daß man hätte

$$s = K + \Delta K$$

so heißt die dritte Gleichung der Gruppe A:

$$\cos (K + \Delta K) = -\sin C_c \sin n + \cos C_c \cos n \cos K$$

Hier kann man zunächst zur möglichst bequemen Ermittelung von ΔK nach zwei Richtungen hin goniometrisch entwickeln, je nachdem K näher an 0° oder näher an 90° ist. In ersterem Falle hätte man nach Auflösung der Cosinusausdrücke:

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}(K + \varDelta K) = \sin^2 \tfrac{1}{2}(C_c + n)$$
$$+ \sin^2 \tfrac{1}{2} K (1 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} C_c)(1 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} n)$$

Hieraus folgt zunächst für $K = o$ der folgende Wert von $\varDelta K$, der dann ohne weiteres gleich s ist:

$$\varDelta K = s = C_c + n$$

wie oben schon durch einfachste Betrachtung der Lage des sphärischen Ortes des Objektes bei $K = o$ oder $S = S_i$ gefunden wurde.

Generell ersieht man aus vorstehender Entwicklung, daß mit Hilfe derselben die Berechnung von $\varDelta K$ sehr einfach wird, sobald man hier bei gehöriger Kleinheit der Winkelgrößen $\frac{1}{2} C_c$ und $\frac{1}{2} n$ die Produkte der zweiten und höheren Potenzen ihrer Sinus multipliziert mit $\sin^2 \frac{1}{2} K$ vernachlässigen kann. Man hätte dann:

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}(K + \varDelta K) - \sin^2 \tfrac{1}{2} K = \sin^2 \tfrac{1}{2}(C_c + n) \ldots$$

woraus mit Vernachlässigungen ganz entsprechender und noch allgemeiner zu rechtfertigender Art die abgekürzte Gleichung hervorgeht:

$$(K + \varDelta K)^2 = (C_c + n)^2 + K^2 \ldots$$

oder

$$(\varDelta K)^2 = (C_c + n)^2 - 2 K \times \varDelta K \ldots$$

welche bei kleinen Werten von K sehr bequem durch Näherung gelöst wird.

Hingegen hat man, von Werten von K ausgehend, die nahe an 90° liegen, folgende Entwicklung:

$$\sin \varDelta K = \frac{1}{\sin K} \Big[\sin C_c \sin n + 2 \cos K [\sin^2 \tfrac{1}{2} C_c + \sin^2 \tfrac{1}{2} n$$
$$- 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} C_c \times \sin^2 \tfrac{1}{2} n - \sin^2 \tfrac{1}{2} \varDelta K]\Big]$$

ein Ausdruck, der ebenfalls um so sicherer vereinfacht werden kann, je kleiner die zweiten und höheren Potenzen der Sinus von C_c, n und K und die Produkte dieser Potenzen sind. Können dieselben hier ganz vernachlässigt werden, dann ist $\varDelta K$ überhaupt gleich Null zu setzen, so lange nicht $\frac{1}{\sin K}$ mit kleiner werdenden Werten von K sich als ein so erheblicher Vergrößerungsfaktor herausstellt, daß dadurch jene Vernachlässigungen in Frage gestellt werden.

Alle diese Entwicklungen verlangen nun also eine allgemeinere Betrachtung über den Konvergenzgrad der nach Potenzen von Winkel-

größen fortschreitenden Reihen, sowie überhaupt in betreff der numerischen Bedeutung der Winkelgrößen.

Die numerische Bedeutung und Behandlung von Winkelgrößen und die trigonometrischen Reihen.

Im allgemeinen sind Winkelgrößen keine eindeutigen Maßgrößen, sondern Ausdrücke für gewisse Beziehungen zwischen Lineargrößen. Bei den Polarkoordinaten in der Ebene (also in dem Aufgabengebiete der ebenen Trigonometrie) bedeutet eine und dieselbe Veränderung des Winkels, welchen die Richtung des Radius vector mit der Leitlinie macht, Ortsveränderungen oder Linearbewegungen des Endpunktes des Radius vector, welche proportional der Länge des letzteren sind. Die Einheiten, in denen die Winkelgrößen ausgedrückt werden, sind nun aliquote Teile derjenigen Winkelbewegung oder Richtungsänderung des Radius vector in der Ebene, welche denselben, nach Zurücklegung einer einmaligen vollen Umdrehung um den Ursprung als Drehungsmittelpunkt, in die anfängliche Lage zurückführt. Dieser zyklischen Winkelbewegung, der fundamentalen Einheit der Winkelgrößen, entspricht eine Linearbewegung des Endpunktes des Radius vector, welche gleich $r \times 2\pi$ ist, wenn mit r die Länge des letzteren bezeichnet wird. Die Einheit der Winkelgrößen wird dann nach dem alten Einteilungssystem, welches sich ursprünglich an die der Anzahl der Tage im Sonnenjahre am nächsten kommende runde und möglichst viele Teiler enthaltende Zahl 360 angeschlossen hat (die auch in der astronomischen Messung dauernde Bedeutung behalten wird, während der Hundertteilung des Quadranten usw. in den Rechnungen mit Winkelgrößen und in manchen Gebieten der tellurischen Praxis mit Winkelmessungen wohl die Zukunft gehören wird), in $360 \times 60 \times 60$ Sekunden eingeteilt, so daß bei einer Winkelbewegung oder Richtungsänderung des Radius vector um eine Sekunde sein Endpunkt eine Linearbewegung gleich $r \times \frac{2\pi}{360 \times 60 \times 60}$ beschreibt und zwar in Gestalt eines Kreisbogens.

Bezeichnet man den Zahlenausdruck $\frac{2\pi}{360 \times 60 \times 60}$ $\left(\text{gleich } \frac{1}{206264,8\ldots}\right)$ kurz mit $\frac{1}{R}$, so ist hiernach bei einer in der Ebene um den Ursprung als Mittelpunkt beschriebenen Richtungsänderung des Radius vector um eine Winkelgröße von x Sekunden die Länge des von seinem Endpunkte beschriebenen Kreisbogens in linearem Ausdrucke gleich $r \times \frac{x}{R}$. Eine Winkelgröße x ist hiernach, mit

stillschweigender Supplierung des Divisors R, ein Ausdruck für das Verhältnis, welches die Länge des zu der Winkelgröße gehörigen Kreisbogens zum Radius vector hat.

Winkelgrößen von wenigen Zehnern der Sekunde sind also bei der Größe der Zahl R in der Tat sehr kleine Zahlenwerte, deren höhere Potenzen sehr schnell gegen Null konvergieren.

Die geradlinigen und rechtwinkeligen Komponenten des Weges, den unter obigen Annahmen der Endpunkt des Radius Vector in einem Kreisbogen beschreibt, werden nun durch die trigonometrischen Funktionen der Winkelgröße $\frac{x}{R}$ im Verhältnis zum Radius mittels folgender Reihen ausgedrückt:

$$\sin x = \frac{x}{R} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{x}{R}\right)^3 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}\left(\frac{x}{R}\right)^5 \ldots.$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{1 \cdot 2}\left(\frac{x}{R}\right)^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\left(\frac{x}{R}\right)^4 \ldots.$$

$$\operatorname{tang} x = \frac{x}{R} + \frac{1}{1 \cdot 3}\left(\frac{x}{R}\right)^3 + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5}\left(\frac{x}{R}\right)^5 \ldots.$$

Die linearen Werte jener geradlinigen rechtwinkligen Komponenten des Kreisbogens sind dann $r \cdot \sin x$ und $r(1 - \cos x)$, und eine andere geradlinige, nicht rechtwinklige Zusammensetzung enthält die Komponenten $r \operatorname{tang} x$ und $r\left(\frac{1 - \cos x}{\cos x}\right)$.

Bei den Winkelmessungen in der Ebene und bei denjenigen Winkelmessungen an der Sphäre, aus denen unmittelbar die Bestimmungen von Bogenlängen größten Kreises hervorgehen, die also auch in einer durch den Ursprung oder Mittelpunkt gehenden Ebene erfolgen, ist es nun durch die Beschaffenheiten unserer Apparate und unserer Augen, außerdem aber durch die unvermeidlichen Schwankungen der Fortpflanzungsrichtungen des Lichtes in den uns umgebenden gasförmigen Medien (von deren Einflüssen auf die Messungen wir nur gewisse mittlere Wirkungen einigermaßen nach ihren Gesetzen ergründen und dadurch aus dem Spiele bringen können) gerechtfertigt, auch bei unsern Berechnungen eine Genauigkeitsgrenze anzusetzen, die natürlich mit der fortschreitenden Vervollkommnung unserer Erkenntnis aller Fehlerquellen und mit der Verbesserung aller Hilfsmittel auch weiterhin noch enger werden

kann, für die man aber zurzeit und wohl auch für die nächsten Jahrzehnte eine zahlenmäßige Festsetzung machen kann. Es wird keinem erheblichen Widerspruch begegnen, wenn hier, wenigstens beispielsweise, angenommen wird, daß bei Berechnungen der Ergebnisse von Winkelmessungen obiger Art diejenigen numerischen Glieder der Entwickelungen unberücksichtigt bleiben dürfen, welche ein Hundertstel der Sekunde $\left(\text{also } \frac{0{,}01}{R} \text{ oder kurz } 0'',01\right)$ nicht übersteigen und auch nicht durch das Hinzukommen gewisser Vergrößerungsfaktoren, in den End-Gleichungen für die gesuchten Ergebnisse der Messungen, schließlich in Beträgen von mehr als $0'',01$ auftreten.

Nach den obigen drei Reihen ergeben sich hiernach die folgenden zahlenmäßigen Grenzbedingungen für die in Sekunden ausgedrückte Winkelgröße x, welche die letztere nicht überschreiten darf, wenn die Summe der Glieder, von dem zweiten anfangend, den Betrag von $\frac{0{,}01}{R}$ nicht überschreiten soll, so daß dann das erste Glied jeder Reihe als eine erfahrungsmäßig nach den Umständen der Messung ausreichende Darstellung der bezüglichen geradlinigen Komponente des im Kreisbogen $\frac{x}{R}$ gemessenen Abstandes gelten darf.

Es ist nach einfacher Rechnung (für $R = 206264{,}8\ldots$), bei welcher man sich wegen der schnellen Konvergenz der Reihen bei diesen kleinen Werten von $\frac{x}{R}$ mit den ersten Gliedern begnügen darf,

$$-\frac{1}{1\cdot2\cdot3}\left(\frac{x}{R}\right)^3 + \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\left(\frac{x}{R}\right)^5 \cdots \text{ kleiner als} \left(\frac{0{,}01}{R}\right),$$

wenn x kleiner als 1368

ferner

$$-\frac{1}{1\cdot2}\left(\frac{x}{R}\right)^2 + \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\left(\frac{x}{R}\right)^4 \cdots \text{ kleiner als} \left(\frac{0{,}01}{R}\right),$$

wenn x kleiner als 64

und

$$+\frac{1}{1\cdot3}\left(\frac{x}{R}\right)^3 + \frac{1}{1\cdot3\cdot5}\left(\frac{x}{R}\right)^5 \cdots \text{ kleiner als} \left(\frac{0{,}01}{R}\right),$$

wenn x kleiner als 1086.

Hiernach darf man (abgesehen von den Fällen, in denen Ver-

größerungsfaktoren in den Gleichungen, wie oben in der Gleichung für $\sin \varDelta K$ das $\frac{1}{\sin K}$, besondere Erwägungen bedingen) unterhalb der bezüglichen Grenzwerte die folgenden Vereinfachungen zulassen:

$$\sin x'' = \frac{x}{R} \cdots \text{ wenn } x'' \angle 1368'' \text{ (oder } \angle \text{ rund } 23')$$

$$\cos x'' = 1 \cdots \text{ wenn } x'' \angle 64'' \text{ (oder } \angle \text{ rund } 1')$$

$$\operatorname{tang} x'' = \frac{x}{R} \cdots \text{ wenn } x'' \angle 1086 \text{ (oder } \angle \text{ rund } 18').$$

Statt der Formulierung

$$\sin x'' = \frac{x}{R} \cdots$$

ist es im allgemeinen gebräuchlich, auf Grund der nach dem Obigen ebenso richtigen Gleichung

$$\sin 1'' = \frac{1}{R} \cdots$$

die folgende zu setzen:

$$\sin x'' = x \cdot \sin 1'' \ldots$$

Dasselbe gilt für den Ausdruck $\operatorname{tang} x''$, für den man auch innerhalb der oben angegebenen Grenzen ohne weiteres setzen kann:

$$\operatorname{tang} x'' = x \cdot \sin 1'' \ldots$$

Es ist klar, daß man hiernach in zweiter Näherung für den $\cos x''$ nach obiger Reihenentwickelung setzen kann:

$$\cos x'' = 1 - \tfrac{1}{2} (x \sin 1'')^2 \ldots$$

und zwar ist dies, wie aus dem 3. Gliede der cos-Reihe erhellt, zulässig bis zu dem Werte $x = 113' \ldots$, also nahezu bis zu $1^0{,}9$.

Winkelgrößen, welche 64 Sekunden oder rund eine Minute nicht übersteigen, darf man also in obigem strengstem Sinn als Größen erster Ordnung bezeichnen. Die zu ihnen gehörenden Kreisbogen darf man sowohl mit dem Sinus, als auch mit der Tangente gleich erachten und ihre Länge in dem Linearausdruck des Radius r gleich

$$\frac{x}{206264{,}8} \times r$$

setzen, und den Sinus versus $(1 - \cos x)$, sowie die Komponente $\left(1 - \frac{1}{\cos x}\right)$, welche beide je eine Bestimmung für den Linear-

betrag der nach dem Mittelpunkt gerichteten von den beiden geradlinigen Komponenten der Bewegung im Kreisbogen darstellen, darf man bei ihnen vernachlässigen, mit andern Worten, man darf innerhalb des Bereiches dieser kleinen Kreisbogenlängen die Kugelfläche als eine Ebene und die sphärischen Konfigurationen als solche betrachten, die aus geradlinigen Elementen in dieser Ebene zusammengesetzt sind. Die Gleichsetzung des Sinus und der Tangente mit dem Bogen darf man aber sogar bis zur Grenze einer Winkelgröße von rund 18 Minuten ausdehnen, womit man auch die Winkelgrenzen der Gesichtsfelder der feineren messenden Fernrohre (siehe oben die Erörterung über den Unterschied zwischen C und C_c) mit umfaßt.

Die sphärischen Winkel und die Winkelmessung in den Parallelkreisen.

Bevor wir nun mit diesen Festsetzungen an die obigen Gleichungen für ΔK und für Q, C_c und n herantreten, ist es erforderlich, zunächst auch im Sinne der rechnerischen Kritik, aber zugleich im Interesse einer möglichst einwandfreien Lehrdarstellung und Anwendung der Sphärik das Wesen der sphärischen Winkel, sowie der Genauigkeitsverhältnisse ihrer Messung und ihrer rechnerischen Verwertung näher in Betracht zu ziehen. Der sphärische Winkel, als der Winkel zwischen zwei Bogen größten Kreises an der Sphäre, bedeutet im Raume einen Winkel zwischen zwei durch den Mittelpunkt der Sphäre (als Ursprung des Polar-Koordinatensystems im Raume) gehenden Ebenen. Während die sphärische Bogenkoordinate (s und σ) oder die Poldistanz des Objekts nichts anders ist als das Komplement des ebenen Neigungswinkels, welchen der Radius vector des Objekts mit der durch den Ursprung gehenden Grundebene des Polar-Koordinatensystems im Raume bildet, ist die sphärische Winkelkoordinate (g und γ) nichts anderes, als der Winkel, welchen die Projektionsebene des Radius vector auf die Grundebene, also die Ebene jenes Neigungswinkels (zugleich die Ebene des größten Kreises, welcher durch den Pol des sphärischen Koordinatensystems und das Objekt S geht) mit der Ebene des größten Kreises, welcher durch den Polpunkt und den Leitpunkt des sphärischen Koordinatensystems geht, also mit der Ebene des Leitkreises bildet. Dieser Winkel zweier zur Grundebene des Polar-Koordinatensystems im Raume rechtwinkligen Ebenen ist identisch mit dem ebenen Winkel, welcher in der Grundebene die Projektion des Radius vector und des Polkreises des Objektes auf dieselbe mit der Projektion des Leitkreises auf die Grundebene bildet, und es ist sofort klar, daß, je näher das Objekt S auf der

Sphäre an dem Pol des sphärischen Koordinatensystems liegt, desto kürzer die Projektion des Radius vector auf die Grundebene wird. Es können dann aus den kleinsten Richtungsänderungen des Radius vector seitlich zu seiner Projektionsebene auf die Grundebene sehr große Änderungen des Winkels jener beiden Projektionen, also aus den entsprechenden kleinsten Veränderungen des sphärischen Ortes des Objektes S seitlich zu dem größten Kreise, in welchem seine Poldistanz gemessen wird, sehr große Veränderungen seiner sphärischen Winkelkoordinate (g oder γ), nämlich sehr große Winkelbewegungen in den sehr kleinen Parallelkreisen um den Polpunkt, hervorgehen. Die sphärische Winkelkoordinate hat also ähnliche Beziehungen zu den sphärischen Bogenkoordinaten, wie nach den obigen Erörterungen bei den Polarkoordinaten in der Ebene die ebene Winkelkoordinate am Ursprunge zu den geradlinigen Abständen der Objekte vom Ursprunge.

Ein erheblicher formaler Unterschied und ein zweifelloser Übelstand der Terminologie der Sphärik besteht jedoch darin, daß bei der letzteren nicht blos die Winkelkoordinate, sondern auch die Bogenkoordinate durch Winkelgrößen und zwar mit Einheiten von übereinstimmender Benennung ausgedrückt wird, während bei den Polarkoordinaten in der Ebene die Winkelgrößen und die Lineargrößen durch die Bezeichnungen und durch die Einheiten ihrer Ausdrücke ganz scharf unterschieden werden.

Dieser Übelstand in der Sphärik würde aber nur durch Komplikationen der Bezeichnungen zu beseitigen sein, die wieder andere Schwierigkeiten oder Übelstände zur Folge haben würden. Wenn man z. B. bei den Ausdrücken der sphärischen Winkel die Grade, Minuten und Sekunden Parallelkreisgrade usw. nennen und durch Einklammerung ihrer bekannten Zeichen (wie etwa $^{(0)}$, $^{(\prime)}$, $^{(\prime\prime)}$) von den Graden, Minuten und Sekunden der Bogen größten Kreises und der ebenen Winkel unterscheiden wollte, so würde dies doch als unsäglich schwerfällig empfunden werden und kaum irgendwo zur Annahme gelangen. Vielleicht gelingt es in Zukunft in Verbindung mit der Schaffung neuer gemeinsamer Bezeichnungsformen in der Wissenschaft und Technik hierfür eine geeignete Abhilfe zu Wege zu bringen. Ein sphärischer Winkel findet in der Tat seine zutreffende Darstellung in dem seiner Winkelgröße entsprechenden Bogen des Parallelkreises, welchem das Objekt nach seiner Poldistanz angehört, und es handelt sich nun darum, die Äquivalente bezw.

die Komponenten der bezüglichen, in Parallelkreisbogen ausgedrückten Ortsveränderungen der Objekte an der Sphäre durch Bogenstücke größten Kreises, also kürzester Linie in der Kugelfläche, sozusagen in allgemeinem sphärischem Linearmaß auszudrücken. Die in einem Parallelkreise an der Sphäre vor sich gehende, in den Winkeleinheiten seines Umkreises angegebene Ortsveränderung kann nun in Winkeleinheiten größten Kreises so dargestellt werden, wie Fig. 5 zeigt, und zwar in der einen Komponente durch ein sogenanntes sphärisches Perpendikel, nämlich das Bogenstück größten Kreises, welches man vom Endpunkt des Parallelkreisbogens auf den Polkreis seines Anfangspunktes derartig fällt, daß es mit diesem Polkreise einen sphärischen rechten Winkel bildet, sodann in der andern Komponente durch dasjenige Bogenstück dieses Polkreises, welches zwischen dem Fußpunkte jenes sphärischen Perpendikels und dem Anfangspunkte des Parallelkreisbogens liegt und als die Krümmung des letzteren etwas uneigentlich bezeichnet zu werden pflegt. Die Länge des sphärischen Perpendikels ist hierbei ein sphärisches Analogon zu dem Sinus und die sogenannte Krümmung ein Analogon zu dem Sinus versus der ebenen Trigonometrie.

Als Polkreis des Anfangspunktes des Parallelkreisbogens ist hier in Fig. 5, im Anschluß an Fig. 3, derjenige Polkreis JS_o angenommen,

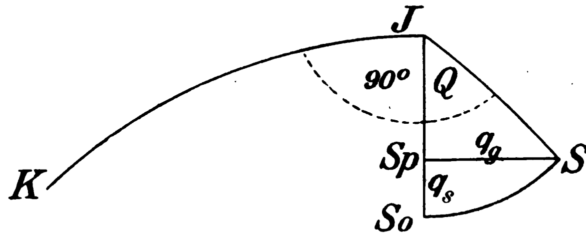


Fig. 5.

welcher mit dem durch die Pole der beiden Achsen J und K gehenden Polkreise JK genau einen sphärischen Winkel von 90° bildet. Der Bogen größten Kreises, um welchen der sphärische Ort des anvisierten Objektes vom Pol J absteht, nämlich $JS = s$, macht dann nach den oben vorhergegangenen Darlegungen, infolge der Abweichungen (C_c und n) der Visierachse von der Normale zur Achse K und der Achse K von der Normale zur Achse J, einen sphärischen Winkel gleich Q mit der Richtung des größten Kreises JS_o.

Mit SS_o ist nun in der Fig. 5 der Parallelkreisbogen bezeichnet, welcher die sphärische Winkelgröße Q darstellt.

Das sphärische Perpendikel ist dann SS_p, und $JS_p = s - S_p S_o$ ist die Poldistanz des Fußpunktes dieses Perpendikels. Für die Länge des Perpendikels SS_p findet man aus dem rechtwinkeligen sphärischen Dreieck JSS_p:

$$\sin SS_p = \sin Q \cdot \sin JS$$

oder wenn man kurz SS_p mit q_g bezeichnet und s für JS einträgt:

$$\sin q_g = \sin Q \cdot \sin s.$$

Für $Q = 90^\circ$ hat man hieraus $q_g = s$, welches in der Tat der Wert der bezüglichen Komponente für den Parallelkreisbogen von 90° ist.

Es ist überhaupt q_g nach vorstehender Formel näherungsweise das in Winkeleinheiten größten Kreises ausgedrückte Äquivalent für kleine sphärische Winkel Q in der Poldistanz s; denn es läßt sich sofort zeigen, daß die andere Komponente der durch Q ausgedrückten Veränderung des sphärischen Ortes des Objektes, nämlich der Bogen größten Kreises $S_o S_p$, um welchen die Poldistanz des Fußpunktes des Perpendikels q_g kleiner ist als s, einen bei kleinen Werten von Q so geringen numerischen Betrag in Winkeleinheiten größten Kreises hat, daß man in den meisten Fällen der vorliegenden Messungspraxis die in Winkeleinheiten größten Kreises ausgedrückte Länge des sphärischen Perpendikels $SS_p = q_g$ als die vollständige Vertretung des sphärischen Winkels Q und des zugehörigen Parallelkreisbogens SS_o, sozusagen als zusammenfallend mit dem letzteren ansetzen kann.

Bezeichnen wir nämlich kurz die zweite Komponente für Q im Bogen größten Kreises, also $S_o S_p$, mit q_s, so haben wir in dem sphärischen Dreieck JSS_p

$$\operatorname{tang}(s - q_s) = \operatorname{tang} s \cos Q.$$

Hieraus sehr leicht durch goniometrische Entwickelung zuerst die folgende, bei den gewönlichen Beträgen von Q in der Praxis obigen Beispiels meistens schon ausreichende Näherungsformel:

$$\operatorname{tang} q_s^o = \sin 2s \times \sin^2 \tfrac{1}{2} Q \ldots$$

und sodann mit Eintragung dieses q_s^o die strenge Formel:

$$\operatorname{tang} q_s = \sin q_s^o \cdot \frac{\cos s}{\cos(s + q_s^o)}$$

Für $Q = 90^0$ hat man hieraus $q_s = s$, welches in der Tat der Wert der bezüglichen Komponente für den Parallelkreisbogen von 90^0 ist.

Statt der letzten strengen Formel für tang q_s kann auch die folgende Reihenentwickelung eintreten, welche im allgemeinen sehr schnell konvergiert und rechnerisch sehr bequem gehandhabt werden kann:

$$\sin(q_s - q_s^o) = \sin q_s^o \cos q_s [f + f^2 + f^3 \ldots]$$

oder, fast stets ausreichend,

$$q_s - q_s^o = q_s^o \times f \ldots \quad \text{wo } f = \operatorname{tang} q_s^o \cdot \operatorname{tang} s$$

(oder auch mit logarithmischen Differenzen)

$$q_s - q_s^o = \frac{d \cdot \log\cos s \times q_s^o - [\log\operatorname{tang} q_s^o - \log\sin q_s^o]}{d \cdot \log\operatorname{tang} q_s^o}$$

wo $d \cdot \log\cos s$ den (positiv genommenen) Zahlenwert der logarithmischen Differenz bei $\log\cos s$ für eine Veränderung von s um eine Sekunde und $d \cdot \log\operatorname{tang} q_s^o$ ebenso den Zahlenwert der logarithmischen Differenz bei $\log\operatorname{tang} q_s^o$ für eine Zunahme von q_s^o um eine Sekunde bedeutet, natürlich beide logarithmische Differenzen in Einheiten derselben Dezimale ausgedrückt und ebenso der Unterschied ($\log\operatorname{tang} q_s^o - \log\sin q_s^o$). (Diese Formeln für q_s finden bei der Berechnung von Beobachtungen an verschiedenen Stellen des Gesichtsfeldes, mit dazwischenliegenden Ortsveränderungen der Bilder der Objekte in den Parallelkreisen der Drehungsbewegung der Sphäre, vielfache Anwendung.)

Aus den obigen Reihenentwickelungen und aus der vorstehenden Formel für die Komponente q_g folgt, daß bei Werten von Q, die unterhalb 23 Bogenminuten liegen, gesetzt werden kann:

$$q_g = Q \cdot \sin s \ldots.$$

Mit andern Worten, man kann solche kleine Winkelgrößen, die in Einheiten von sphärischen Winkeln oder Parallelkreisbogen angegeben sind, in Einheiten der Bogen größten Kreises oder kürzester Linie auf der Sphäre ausdrücken, wenn man sie mit dem Sinus der Poldistanz des Parallelkreisbogens multipliziert. Dasselbe folgt übrigens auch einfach aus dem Verhältnis des Radius eines Parallelkreises zum Radius des größten Kreises.

In dem sphärischen Dreieck *KSJ* (Fig. 3 und Fig. 4) ergibt

sich nun außer den drei Grundgleichungen A unter anderm auch noch folgende Gleichung

$$-\sin C_c = \sin n \cdot \cos s - \cos n \sin s \cdot \sin Q$$

oder
$$\sin s \cdot \sin Q = \frac{\sin C_c}{\cos n} + \tang n \cdot \cos s$$

Da nun auf der rechten Seite keinerlei Vergrößerungsfaktor für $\sin C_c$ und $\tang n$ vorhanden ist, insofern $\cos n$ bei den kleinen hier in Frage kommenden Werten von n fast genau $= 1$ ist, so kann man, falls C_c und n die obigen Grenzen einer Größe erster Ordnung (also nach den bezüglichen Annahmen eine Bogenminute) einhalten, setzen:

$$\cos n'' = 1 \ldots$$

und noch sicherer

$$\sin C_c'' = C_c \sin 1'' \ldots \quad \tang n'' = n \sin 1'' \ldots$$

so daß, da nach den vorangehenden Formeln

$$\sin s \cdot \sin Q = \sin q_g$$

der einfache Ausdruck sich ergibt:

$$\sin q_g = \sin 1'' \, [C_c + n \cos s] \ldots .$$

oder, da hiernach auch mit genügender Sicherheit

$$\sin q_g = q_g \cdot \sin 1'' \ldots$$

gesetzt werden kann:

$$q_g = C_c + n \cos s \ldots$$

Da, wie wir oben gesehen haben, für $Q = 90°$, also wenn sich das Objekt S in der Verlängerung des größten Kreises KJ befindet, $q_g = s$ und zugleich $K = o$ zu setzen ist, so folgt aus vorstehender Gleichung, wenn wir noch die Relation $s = K + \varDelta K$ berücksichtigen, zunächst die Gleichung

$$s = C_c + n \cos \varDelta K \ldots$$

oder den Voraussetzungen und Konsequenzen der obigen Näherung entsprechend, als Kontrole dieser ganzen Entwickelung, übereinstimmend mit den früheren einfacheren Betrachtungen:

$$s = C_c + n \ldots .$$

Bei der Ermittelung der Werte von C_c und von n aus den

Werten von Q_1 und Q_2 nach den Gleichungen auf Seite 37 ist es am zweckmäßigsten, in aller Strenge zu verfahren, wenn die Werte der Q die Grenze übersteigen, unterhalb deren man

$$\text{tang}\, Q = Q \sin 1'' \ldots$$

setzen kann. Die bezüglichen Gleichungen sind bequem genug, während die etwaige Berücksichtigung höherer Glieder der Reihenentwickelungen in solchen Fällen umständlicher und undurchsichtiger ist.

Die Genauigkeitsverhältnisse der Messungen in verschiedenen Parallelkreisen.

Aber wenn man nun die Werte C_c und n kennt und dann für irgendeine Poldistanz s den Winkel Q berechnen soll, um ihn mit positivem oder negativem Zeichen zu den Kreisablesungen G hinzuzufügen, werden noch besondere Erwägungen in betreff der Genauigkeitsgrenzen der Berechnung und der Angabe erforderlich.

Nach den vorangegangenen Entwickelungen würde man Q in Funktion von C_c und n berechnen können entweder aus der Gleichung:

$$\text{tang} \cdot Q = \frac{\sin n \cos K + \text{tang}\, C_c \cdot \cos n}{\sin K}$$

oder aus der Gleichung:

$$\sin Q = \frac{\sin n \cdot \cos s + \sin C_c}{\sin s \cdot \cos n}$$

In beiden Formeln ist auf der rechten Seite ein Vergrößerungsfaktor $\frac{1}{\sin K}$ oder $\frac{1}{\sin s}$ enthalten, welcher bei kleinen Poldistanzen s sehr erheblich werden und sehr große Werte von Q bedingen kann, auch wenn C_c und n Größen erster Ordnung in obigem Sinne sind. Hierbei würde eine Vernachlässigung der höheren Glieder der Reihenentwickelung für sin, cos und tang, auf der rechten Seite mit denselben Vergrößerungsfaktoren auf Q übergehen. Auf den ersten Blick könnte man alle diese Vergrößerungswirkungen in Q nur für scheinbare erklären, denn sie sind ja nur in Einheiten der Parallelkreise ausgedrückt und ihre Vergrößerung ist nur eine Folge der Verkleinerung der Parallelkreise und der betreffenden Winkeleinheiten, proportional der Abnahme von $\sin s$, so daß in der Tat auch in den kleinsten Parallelkreisen für die Komponente q_g die obige Bestimmung ausreichen würde $q_g = C_c + n \cos s \ldots$, wenn nur zugleich die andere Komponente der Ortsveränderung im Parallelkreisbogen, nämlich q_s, welche im allgemeinen bei denselben Werten von C_c

und n mit der Abnahme von s erheblich wächst, gehörig berücksichtigt würde.

Die ganze Betrachtung kompliziert sich aber durch Erwägungen und Erfahrungen aus dem Gebiete der Fehlertheorie, welche uns lehren, daß für die Ortsbestimmungen im Sinne der Koordinate g, welche sich aus den Kreisablesungen G und den Bestimmungen des Winkels Q durch C_c, n und s zusammensetzen, eine größere Genauigkeit auch in Winkelmaß größten Kreises erreichbar ist, als im Sinne der Bogenkoordinate s, welche durch die Kreisablesungen S und durch die sehr kleine Korrektion ΔK (ebenfalls, nach obiger Gleichung, Seite 38, eine Funktion von C_c, n und s) bestimmt wird.

Dieser Genauigkeitsvorteil für die Ortsbestimmung an der Sphäre im Sinne der Koordinate g wird unter Umständen in sehr kleinen Poldistanzen so erheblich, daß man die Genauigkeitsgrenze für die rechnerische Bestimmung der sphärischen Winkel Q, welche letzteren in diesen kleinen Poldistanzen sehr große Beträge annehmen können, nicht nach ihren lediglich auf Bogenelemente größten Kreises durch Multiplikation mit $\sin s$ reduzierten Beträgen normieren darf, sondern durch etwas schärfere Erwägungen bestimmen muß, denen wir hier, da sie meistens in den Lehrbüchern etwas zu summarisch erörtert werden, einige nähere kritische Betrachtungen, mit einem kleinen Exkurs in die Theorie der sogenannten zufälligen Beobachtungsfehler, widmen wollen. Wir werden dadurch zunächst einen etwas festeren Anhalt für das Maß der Abkürzungen bei der Berechnung von Q aus C_c, n und s nach der obigen Formel für $\sin Q$ gewinnen.

Wir beschränken uns hierbei zunächst auf die Einstellung von solchen Objekten S, welche zu den Fixpunkten unsers instrumentalen Koordinatensystems J und W eine, jedenfalls während einer vollständigen und in sich zusammenhängenden Beobachtungsreihe unveränderliche Lage haben, so daß von einer genauen Festlegung der einzelnen Beobachtungsepochen durch Zeitmessung zunächst Abstand genommen werden kann. Dann setzt sich die Einstellung des Visierapparates auf ein Objekt S im Sinne der Koordinate g zusammen aus der Konstatierung der Lage seines Bildes (in der mikrometrisch eingeteilten Bildfläche des Fernrohrs) im Sinne des Abstandes KS und aus der Kreisablesung G. Nehmen wir an, das Bild des Objektes sei möglichst genau in den Mikrometer-Mittelpunkt oder -Nullpunkt (etwa den zentralen Kreuzungspunkt zweier



Fadensysteme) eingestellt worden, so daß man den entsprechenden Abstand KS an der Sphäre gleich $90^{\circ} + C_c$ ansetzen kann. Die Erfahrung lehrt nun aber, daß auch bei den vermeintlich genauesten Operationen dieser Art zufällige Fehler begangen werden und ebenso bei der zugehörigen Kreisablesung G. Als ein Maß für solche zufällige Fehler gilt der sogenannte wahrscheinliche Fehler, welcher aus wiederholten Messungen unter wesentlich übereinstimmenden Bedingungen und Umständen persönlicher, instrumentaler und physikalischer Art ganz erfahrungsmäßig bestimmt werden kann. Bildet man das arithmetische Mittel aus einer großen Anzahl von Messungsergebnissen einer ganz bestimmten Art, deren Verschiedenheit nur durch die bezüglichen zufälligen Fehler verursacht sein kann, während sie sonst identisch sein müßten, so ist dieser Mittelwert dem wahren Werte des gesuchten Messungsergebnisses sehr nahe, und zwar um so näher, je größer die Anzahl der unter homogenen Bedingungen wiederholten Messungen war. Durch die Vergleichung jedes der einzelnen Messungsergebnisse mit ihrem Mittelwert erhält man also Näherungswerte der erfahrungsmäßig vorgekommenen zufälligen Messungsfehler, und wenn man diese Fehlerwerte, ohne Rücksicht auf ihre Zeichen, nach ihrer Zahlengröße ordnet, so bildet der in der Mitte ihrer Reihe stehende sogenannte Zentralwert eine Art von Genauigkeitsmaß für die bezügliche Messungsoperation und wird der „wahrscheinliche“ Fehler derselben genannt. Nach dem vorstehend in Kürze dargelegten Verfahren seiner Ermittelung ist die Anzahl derjenigen in der ganzen Reihe wirklich vorgekommenen Fehler, welche kleiner sind als der „wahrscheinliche“ Fehler, nahe dieselbe, wie die Anzahl derjenigen in der ganzen Reihe wirklich vorgekommenen Fehler, welche größer sind als der „wahrscheinliche“ Fehler, sodaß die Wahrscheinlichkeit, daß im einzelnen Falle der wirkliche Fehler größer sei, als der „wahrscheinliche“, dieselbe ist, wie die Wahrscheinlichkeit, daß jener kleiner sei als dieser letztere. Wir wollen hier den „wahrscheinlichen“ Fehler eines beliebigen Messungsergebnisses M kurz mit $\pm \varepsilon M$ bezeichnen, wobei das doppelte Vorzeichen zur Unterscheidung dieser hypothetischen Verbesserung von einer wirklich nachweisbaren Verbesserung dient. Die Zahlenwerte dieser hypothetischen Verbesserungen haben aber die große praktische Bedeutung, daß sie auf einer allseitig anerkannten Grundlage Anhaltspunkte für die Schätzung des Genauigkeitsgrades der bezüglichen

Messungsoperation bieten. Hiermit wird es ermöglicht, die schließlichen Gesamtresultate aus Messungen von verschiedener Genauigkeit nach festen und rationellen Vorschriften abzuleiten, welche die persönliche Willkür dabei, für alle Beteiligten beruhigend, aus dem Spiel bringen. Diese Fehlertheorie setzt zugleich fest, daß, wenn ein Messungsergebnis durch verschiedene von einander unabhängige Fehlerquellen beeinflußt wird, der „wahrscheinliche" Fehler des Gesamtresultates gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der einzelnen „wahrscheinlichen" Fehler anzunehmen ist, welche diese verschiedenen einzelnen Fehlerquellen charakterisieren.

Wir wollen jetzt eine Anwendung von obigen Grundzügen der Fehlertheorie auf die vorangehenden Erörterungen und Aufgaben aus dem Gebiete der Bestimmung von sphärischen Koordinaten machen.

Bei der Bestimmung der Koordinate g kommt zunächst der Fehler in Frage, welcher bei der oben erörterten Einstellung des Bildes des Objektes S in dem Mikrometer- oder Fadennetz-Mittelpunkt, und zwar in der Richtung KS, begangen wird. Nennen wir den bezüglichen wahrscheinlichen Fehler, und zwar in Winkeleinheit größten Kreises ausgedrückt, εf_g, so hat derselbe im sphärischen Winkel g, nämlich im Parallelkreisbogen bei der Poldistanz s, nach den vorangehenden Darlegungen den Betrag $\frac{\varepsilon f_g}{\sin s}$. Sodann ist die zweite Fehlerquelle der Bestimmung von g enthalten in der Ablesung G des Kreises zur Achse J. Wir bezeichnen den wahrscheinlichen Fehler für dieselbe mit $\pm \varepsilon G$. Der vollständige Ausdruck für g war aber oben:

$$g = G' - G_w + 90^\circ + Q$$

in der Lage I des Instruments, oder auch

$$g = G'' - G_w - 90 - Q$$

in der Lage II des Instruments.

Die Unterscheidung der beiden Lagen hat aber hier keine Bedeutung, da wir in der Regel annehmen dürfen, daß der „wahrscheinliche" Fehler infolge der Übereinstimmung der Genauigkeitsbedingungen der beiden Einstellungen bei G' nahezu derselbe ist, wie derjenige bei G''. Wir hätten dann schlechtweg nach der obigen Vorschrift betreffend das Zusammenwirken der verschiedenen

unabhängigen wahrscheinlichen Fehler in Gestalt der Summe ihrer Quadrate:

$$\varepsilon g = \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon f_g}{\sin s}\right)^2 + (\varepsilon G)^2 + (\varepsilon G_w)^2 + (\varepsilon Q)^2}.$$

Der wahrscheinliche Fehler, welcher der Kenntnis von G_w anhaftet, wird im allgemeinen im Vergleich mit den jedesmaligen Beobachtungsfehlern εf_g und εG nicht irgendwie erheblich in Frage kommen, da die Ermittelung des Wertes G_w, je nach der besonderen Art und Bedeutung des Leitpunktes W, in der Regel auf einer so großen Anzahl einzelner Einstellungen bei verschiedenen Beobachtungsreihen beruhen wird, daß bei ordentlichem Verfahren der wahrscheinliche Fehler εG_w beliebig klein gehalten werden kann. Ähnliches gilt für εQ, da Q auch meistens auf ein mittleres Ergebnis für die Werte C_c und n begründet sein wird, und diejenige rechnerische Ungenauigkeit in Q, welche gerade bei den vorliegenden Betrachtungen in Frage ist, nicht den Charakter eines zufälligen Fehlers, sondern einer Korrektion haben wird.

Wir haben also zunächst ausreichend:

$$\varepsilon g = \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon f_g}{\sin s}\right)^2 + (\varepsilon G)^2} \ldots$$

Ganz analog haben wir für die Bestimmung der Koordinate s zunächst die Einstellung des Bildes des Objektes S in den Mikrometer-Mittelpunkt in der Richtung des größten Kreises JS mit dem wahrscheinlichen Fehler $\pm \varepsilon f_s$, sodann die Ablesung S des Kreises zur Achse K mit dem wahrscheinlichen Fehler εS, endlich die Bestimmung der Kreisangabe S_i mit dem wahrscheinlichen Fehler εS_i und die Korrektion ΔK mit dem wahrscheinlichen Fehler $\varepsilon \Delta K$. Hiernach:

$$\varepsilon s = \sqrt{(\varepsilon f_s)^2 + (\varepsilon S)^2 + (\varepsilon S_i)^2 + (\varepsilon \Delta K)^2}.$$

Den Betrag $(\varepsilon S_i)^2$ kann man hier vernachlässigen nach ganz denselben Gesichtspunkten, wie oben $(\varepsilon G_w)^2$, und $(\varepsilon \Delta K)^2$ wegen der außerordentlichen Geringfügigkeit des darin enthaltenen Einflusses der kleinen Unsicherheiten der Kenntnis von C_c und n, mit noch größerem Recht als oben $(\varepsilon Q)^2$. Wir haben somit einfach:

$$\varepsilon s = \sqrt{(\varepsilon f_s)^2 + (\varepsilon S)^2} \ldots$$

Vergleichen wir jetzt εg und εs miteinander, und bedenken wir,

daß die beiden Einstellungs-Unsicherheiten in der Bildebene, nämlich εf_g und εf_s, im allgemeinen übereinstimmend sein werden, nehmen wir sodann beispielsweise an, daß die beiden wahrscheinlichen Fehler der Kreisablesungen, εG und εS, ebenfalls nicht erheblich verschieden sind, da bei einem sphärischen Universalinstrument, wie dem hier betrachteten, zwar selten die beiden Kreise völlig gleich eingerichtet und gleich groß sind, aber doch näherungsweise übereinstimmende Bedingungen bei den beiden Ablesungen obwalten werden. Unter den vorstehenden Annahmen würde dann εg im allgemeinen größer sein, als εs, und zwar in um so stärkerem Betrage, je kleiner sin s, also je näher das Objekt dem Pole J ist. Je kleiner aber sin s ist, desto geringere Bedeutung hat εg im Bogen größten Kreises, und die entscheidende Genauigkeitsbestimmung liefert ja doch dieser letztere Betrag, nämlich

$$\varepsilon g \cdot \sin s = \sqrt{(\varepsilon f_g)^2 + (\varepsilon G \cdot \sin s)^2} \ldots$$

Es folgt hieraus, daß in sehr kleinen Poldistanzen s unser Messungsverfahren für alle in Bogen größten Kreises ausgedrückten Abstände rechtwinklig zum Polkreise JS des Objektes S eine wahrhaft mikrometrische Genauigkeit bietet und den Einfluß der Unsicherheiten der Kreisablesungen auf ein Minimum zu reduzieren gestattet, was dagegen bei der vorliegenden Art der Messung der Poldistanzen JS nicht möglich ist.

Noch schärfer tritt dieser Unterschied der Messungsgenauigkeiten für die beiden Koordinaten hervor, wenn wir von der Beständigkeit der Lage der Objekte zu den beiden Fixpunkten J und W absehen und in Betracht ziehen, daß bei allen Himmelsobjekten die generelle scheinbare Drehung der Sternsphäre um den Pol P der Erdachse, beziehungsweise die wirkliche Drehungsbewegung des bei allen fundamentalen Messungen wichtigsten und am unmittelbarsten einstellbaren Fixpunktes, des Zeniths Z, in einem Parallelkreise um den Pol P und gegen den am Himmel relativ festen Leitkreis PE (siehe Seite 24) uns dazu zwingt, die augenblickliche Phase jener Drehungen durch Anwendung von zeitmessenden Apparaten mit größtmöglicher Genauigkeit für jeden Zeitpunkt einer Einstellung von Himmelsobjekten zu bestimmen.

Wenn die Zeiteinheit, in welcher die bezügliche Drehungsphase des Polkreises PZ um P und gegen die Leitlinie PE mit Hilfe der zeitmessenden Apparate angegeben wird, eine sogenannte Sternzeit-

sekunde ist, nämlich gleich der Dauer einer vollen Drehung von PZ gegen PE, geteilt durch den konventionellen Zahlenwert $24 \times 60 \times 60$, so beschreibt scheinbar jedes Himmelsobjekt S während dieser Zeiteinheit gegen PZ einen Parallelkreisbogen, dessen Länge in Winkeleinheiten größten Kreises gleich $15'' \times \sin \sigma_P$ ist, wo σ_P die Poldistanz PS bezeichnet. Die Fixierung solcher Zeitpunkte ist nun aber auch, teils infolge der Unvollkommenheiten der zeitmessenden Apparate, teils und hauptsächlich infolge der unvermeidlichen kleinen Unsicherheiten, mit denen der Beobachter den Zeitpunkt der von ihm vollzogenen Einstellung des Bildes des Objekts, innerhalb des Mikrometer- oder Fadennetzes, an eine bestimmte Phase der Schwingungen der zeitmessenden Apparate anknüpft, mit einem wahrscheinlichen Fehler behaftet, den man ebenfalls, wie oben erörtert, erfahrungsmäßig ermitteln kann. Wir wollen den letzteren, in Einheiten der Sternzeitsekunde ausgedrückt, mit εU (anknüpfend an die Benennung der Uhrzeit mit U) bezeichnen.

Bei den Einstellungen eines Objektes, welches an der scheinbaren Drehung der Himmelsfläche teilnimmt, wird nun dieser wahrscheinliche Fehler der Bestimmung der bezüglichen Drehungsphase die Messung der Koordinaten g und s in dem instrumentalen Koordinatensystem, dessen Fixpunkte J und W sind, in verschiedenem Betrage beeinflussen je nach dem Winkel, um welchen das Parallelkreis-Element jener Drehungsbewegung, dessen Winkelgröße in Einheiten größten Kreises $\varepsilon U \times 15'' \times \sin \sigma_P$ beträgt, gegen den Polkreis JS geneigt ist. Nennen wir den Cosinus dieses Winkels F_s und den Sinus desselben F_g, so tritt nunmehr zu den beiden oben angegebenen wahrscheinlichen Fehlern εg und εs noch die soeben erörterte Unsicherheit der Angabe des zu der Einstellung des Objekts S gehörigen Zeitpunktes in folgenden Gesamtausdrücken hinzu:

$$\varepsilon g \cdot \sin s = \sqrt{(\varepsilon f_g)^2 + (\varepsilon G \cdot \sin s)^2 + (\varepsilon U \times 15 \sin \sigma_P \times F_g)^2}$$

$$\varepsilon s = \sqrt{(\varepsilon f_s)^2 + (\varepsilon S)^2 + (\varepsilon U \times 15 \sin \sigma_P \times F_s)^2}$$

Je näher das Objekt S am Himmel dem Polpunkt P der täglichen Drehung liegt, und je kleiner demzufolge $\sin \sigma_P$ ist, desto geringer ist der Einfluß der Unsicherheiten der Zeitangabe auch auf εg und εs. Und je näher J mit P zusammenfällt, desto kleiner ist dann gleichzeitig $\sin s$, während dann F_s sehr klein und F_g nahe gleich Eins wird.

Aus allen diesen Erwägungen ist aber die Praxis hervorgegangen, daß man die Winkelkoordinaten g und γ überhaupt, besonders aber, wenn der Pol J mit dem Polpunkt P der täglichen Drehung nahe zusammenfällt, bei den kleineren und kleinsten Poldistanzen (s und σ) der Objekte, im Parallelkreisbogen bis auf dieselben Dezimalstellen der Winkeleinheit angiebt, wie die Poldistanzen selber, die in Winkeleinheiten größten Kreises ausgedrückt werden.

Dies Verfahren trägt ganz summarisch dem oben dargelegten Sachverhalt Rechnung, daß durch sphärische Meßinstrumente der obigen Art die sphärischen Örter in der Richtung rechtwinkelig zu den Poldistanzen in Winkelmaß größten Kreises bei kleinen Poldistanzen genauer bestimmt werden, als in der Richtung der Poldistanz selber. Und es ist zuzugeben, daß es schwer sein würde, in diesen Angaben ohne große Weitläufigkeiten nach völlig rationellen allgemeinen Vorschriften zu verfahren, weil die verschiedenen Elemente der obigen Gesamtausdrücke der Messungsfehler unter den verschiedenartigen Umständen und in Betracht der verschiedenen Beschaffenheit der Einrichtungen sehr stark variieren.

Jedenfalls waltet ziemlich allgemeine Übereinstimmung darin, daß man diejenigen Komponenten kleiner Ortsveränderungen am Himmel, welche in einem bestimmten sphärischen Koordinatensystem rechtwinkelig zu den nach dem Pole des letzteren gerichteten größten Kreise stattfinden, an keiner Stelle lediglich in Einheiten des Parallelkreisbogens der zugehörigen Poldistanz ausdrückt, sondern durch Multiplikation mit dem Sinus der Poldistanz auf das Winkelmaß größten Kreises bringt.

Rechnerische Beispiele für die Ausführung der vorstehenden instrumentalen Kritik.

Jedoch bei der Berechnung von Q aus C_c und n zum Zweck der Ermittelung von g nach der Formel

$$g = G' - G_w + 90^\circ + Q$$

oder

$$g = G'' - G_w - 90^\circ - Q$$

wird man — entsprechend der Praxis, die Winkelkoordinate g in den verschiedenen Poldistanzen auf dieselbe Anzahl von Dezimalstellen der Winkeleinheit in Parallelkreisbogen anzugeben, wie die Koordinate s in Bogen größten Kreises — die strengeren Formeln zur Anwendung bringen, welche auf Seite 50 gegeben sind und zwar die Formel tang Q, so lange man $s = K + \varDelta K$ noch nicht streng berechnet hat, also erst mit K operieren kann, dagegen die Formel sin Q, sobald man s genau genug kennt. Man wird

aber auch bei diesen Berechnungen die Näherungsformel für Q, welche durch Abkürzung der Reihenentwicklungen von sin, cos und tang auf die ersten Glieder jeder dieser Reihen entsteht, nämlich

$$Q = n \operatorname{cotg} s + C_c \operatorname{cosec} s \ldots$$

als ausreichend genau bis nahezu auf das Hundertstel der Sekunde in Q betrachten dürfen, so lange n und C_c erheblich kleiner als eine Bogenminute sind und die Faktoren cotg s und cosec s die Beträge 1 bis 5 nicht überschreiten, also s zwischen 90° und 10° bleibt. Auch wenn s kleiner als 10° wird, und wenn n oder C_c oder beide näher an eine Bogenminute kommen oder sogar größer werden, kann die obige abgekürzte Formel gute rechnerische Verwendung finden, indem man sie statt der strengen Formel bis zu $s = 1°$ hinab anwendet und für die Reduktion der dabei gefundenen Näherungswerte auf die formell genaueren Werte von Q entsprechend den jeweilig geltenden Beträgen von n und C_c, welche oft für lange Zeit als nahe unveränderlich behandelt werden dürfen, eine kleine Hilfstafel in großen Intervallen rechnet.

Beispielsweise sei $n = +20'',00$ $C_c = +20'',00$, und man hätte danach folgende Beträge für den obigen Ausdruck

bei $s = 90°$	$n \operatorname{cotg} s + C_c \operatorname{cosec} s =$	$+ 20'',00$
60	"	24,24
30	"	74,82
20	"	112,09
10	"	228,61
9	"	254,13
8	"	286,01
7	"	327,00
6	"	381,63
5	"	458,07
4	"	572,72
3	"	767,29
2	"	1145,80
1	"	2291,77

dagegen für dieselbe Reihe von Werten s:

$q_g = n \cos s + C_c =$	$+ 20'',00$
"	30,00
"	37,32
"	38,88

$$
\begin{array}{ll}
q_g = n \cos s + C_c = & +\ 39{,}70 \\
\qquad\quad " & \quad\ 39{,}76 \\
\qquad\quad " & \quad\ 39{,}80 \\
\qquad\quad " & \quad\ 39{,}85 \\
\qquad\quad " & \quad\ 39{,}89 \\
\qquad\quad " & \quad\ 39{,}92 \\
\qquad\quad " & \quad\ 39{,}95 \\
\qquad\quad " & \quad\ 39{,}97 \\
\qquad\quad " & \quad\ 39{,}99 \\
\qquad\quad " & \quad\ 40{,}00
\end{array}
$$

Berechnet man dagegen Q nach der strengen Formel für $\sin Q$, so findet man

$$
\begin{array}{ll}
\text{für } s = 2^0 & Q = 1145'',81 \\
\text{und für } s = 1^0 & Q = \ 2291{,}82
\end{array}
$$

also bei $s = 2^0$ eine Verbesserung des Näherungswertes um $+\ 0'',01$,
„ $s = 1^0$ „ „ „ „ „ $+\ 0{,}05$.

Unterhalb $s = 1^0$ wächst natürlich diese Verbesserung, die hier für größere Poldistanzen von 2^0 aufwärts verschwindend klein ist, zu sehr viel größeren Beträgen an. Man sieht aber zugleich aus der letzten Kolumne, daß hier in Poldistanzen unter 1^0 der Ausdruck im Bogen größten Kreises, nämlich q_g, konstant gleich $40'',00$ wird, und man wird jedenfalls bei Werten, wie die vorliegenden von n und C_c, sich hierbei befriedigen und bei den Poldistanzen unter 1^0 auch im Parallelkreisbogen Q als ausreichend genau berechnet erachten durch die Formel:

$$
\sin Q = (n + C_c) \frac{\sin 1''}{\sin s} \cdots
$$

Auch kann man unter Umständen mit Hilfe der Reihenentwickelung für $\sin Q$ so verfahren, daß man zu dem Betrage des Ausdruckes $n \operatorname{cotg} s + C_c \operatorname{cosec} s$ (wie er oben in der kleinen Tafel gegeben ist) einfach hinzufügt:

$$
dQ = +\ 0'',183\,(Q)^3 \ldots
$$

wo Q in Einheiten des ganzen Parallelkreisgrades angenommen ist. Diese Formel ist nahezu bis auf $0'',01$ im Parallelkreisbogen genau, so lange Q nicht größer ist als 10^0. Sie gibt auch für den letzten Wert der obigen Tafel bei $s = 1^0$, wo der Näherungswert von Q $2291'',77$ oder $0^0,637$ beträgt, die Verbesserung

$$dQ = +\,0'',183 \times (0,637)^2 = +\,0'',047$$

also übereinstimmend mit der obigen aus den vorangehenden Formeln gefundenen Verbesserung $+\,0'',05$.

Wir können nun auf Grund obiger Erörterungen auch die rechnerische Behandlung der Gleichung für $\varDelta K$ (Seite 39) näher ins Auge fassen, woran wir noch einige Darlegungen rechnerischer Art in betreff der in den Polkreis JS fallenden Komponente q_s der Ortsveränderung im Parallelkreise knüpfen wollen.

In der Gleichung für $\sin \varDelta K$ können wir jetzt zunächst mit aller Sicherheit, so lange nicht $\sin K$ (was wir in dieser Gleichung mit $\sin (K + \varDelta K)$ oder $\sin s$ unbedenklich identifizieren dürfen) selber eine Größe von der ersten Ordnung (wie n und C_c) ist, also bis in die unmittelbare Nähe des Polpunktes J die Glieder weglassen, welche von der Ordnung $\sin^2 \frac{1}{2} C_c \times \sin^2 \frac{1}{2} n$ sind, und dementsprechend auch das Glied mit $\sin^2 \frac{1}{2} \varDelta K$. Und in der Nähe des Polpunktes tritt dafür die der Gleichung für $\sin \varDelta K$ oben vorangehende Form der Reihenentwicklung ein, welche bei voller Genauigkeit um so einfacher wird, je kleiner $\sin K$ oder $\sin s$ ist. Mit jener Weglassung hat man aber:

$$\sin \varDelta K = \frac{1}{\sin K} [\sin C_c \sin n + 2 \cos K (\sin^2 \tfrac{1}{2} C_c + \sin^2 \tfrac{1}{2} n)] \ldots$$

Die nachfolgende kleine Tafel wird beispielsweise erkennen lassen, welches der Verlauf der Zahlenwerte von $\varDelta K$ bei den oben angenommenen Beträgen von n und C_c ist, da wir generell wegen des Vergrößerungsfaktors $\frac{1}{\sin K}$ hier trotz der Kleinheit jener Beträge die Glieder von der Ordnung der zweiten Potenzen und der Produkte ihrer Sinus nicht vernachlässigen dürfen. Wir dürfen aber jedenfalls die Glieder von der Ordnung der dritten und vierten Potenzen dieser Sinus hier weglassen, also zunächst die vorstehende Formel noch, wie folgt, für die Rechnung vereinfachen.

$$\varDelta K \cdot \sin 1'' = \frac{\sin^2 1''}{\sin K} [C_c \times n + \tfrac{1}{2} \cos K (C_c^2 + n^2) \ldots]$$

oder

$$\varDelta K = C_c \times n \times \sin 1'' \times \operatorname{cosec} K + \tfrac{1}{2}(C_c^2 + n^2) \times \sin 1'' \times \operatorname{cotg} K.$$

Im vorliegenden Beispiel ist

$$C_c \times n = +\,400 \text{ und } \tfrac{1}{2}(C_c^2 + n^2) = +\,400$$

und damit ergibt sich folgende Reihe von Werten für ΔK:

bei K (oder s) = 90°	$\Delta K = + 0'',0019$
„ 60°	0,0033
„ 30°	0,0072
„ 20°	0,0110
„ 10°	0,0222
„ 9°	0,0246
„ 8°	0,0277
„ 7°	0,0317
„ 6°	0,0370
„ 5°	0,0444
„ 4°	0,0555
„ 3°	0,0741
„ 2°	0,1111
„ 1°	0,2222

Für noch kleinere Werte von K wird hier die obige Formel nicht mehr ausreichend. Es tritt dann die Entwickelung auf Seite 39 in ihre Rechte $(K + \Delta K)^2 = (C_c + n)^2 + K^2 \ldots$, welche bei den kleinsten Werten von K am besten mit Hilfe einer Tafel der Quadrate angewendet wird. Für $K = 1°$ findet man hieraus noch übereinstimmend mit dem letzten Werte der vorangehenden Zusammenstellung $\Delta K = + 0'',2222$ und zwar auch ausreichend genau mit Hilfe der Näherungsformel $\Delta K = \frac{(C_c + n)^2}{2K} \ldots$

Die letztere Näherungsformel reicht auch noch bis $K = 10'$

für $K = 50'$	$\Delta K = + 0'',267$
„ = 40	„ 0,333
„ = 30	„ 0,444
„ = 20	„ 0,667
„ = 10	„ 1,333
„ = 1	„ 12,11
„ = 0	„ 40,00

Es bleibt noch übrig, an dieser Stelle einen Überblick über den Gang der Komponente q_s (der sogenannten Parallelkreiskrümmung) in Funktion von s und Q zu geben. Wir wählen als Beispiel hierzu die obige Wertreihe der Q, welche den Beträgen $C_c = + 20''$ und $n = + 20''$ in den verschiedenen Poldistanzen s entsprechen. Wegen

der relativen Kleinheit der q_s genügt es hierbei, die Werte der Q, statt wie oben in Sekunden, nur auf Zehntel der Minute anzugeben. Wir finden nach den Formeln von Seite 47 die folgenden Werte von q_s (bis zu $s = 1^0$ hier ausreichend genau durch den Näherungswert q_s^0 ausgedrückt):

bei $Q = 0',3$	und	$s = 90^0$		$q_s = 0'',000$	
„	0,4	„	60^0	„	0,001
„	1,2	„	30^0	„	0,006
„	1,9	„	20^0	„	0,010
„	3,8	„	10^0	„	0,021
„	4,2	„	9^0	„	0,024
„	4,8	„	8^0	„	0,027
„	5,5	„	7^0	„	0,032
„	6,4	„	6^0	„	0,037
„	7,6	„	5^0	„	0,044
„	9,5	„	4^0	„	0,055
„	12,8	„	3^0	„	0,075
„	19,1	„	2^0	„	0,111
„	38,2	„	1^0	„	0,222

Für noch kleinere Poldistanzen reduziert sich die Formel für q_s immer näher auf den Ausdruck für ΔK, so daß von $s = 1^0$ abwärts die obige Wertreihe von ΔK in vorliegendem Falle auch für q_s Geltung hat. Für $K = o$ und $s = C_c + n$ wird, ebenso wie ΔK, auch q_s gleich $C_c + n$, während dann $Q = 90^0$ ist, und die in diesem Parallelkreisbogen ausgedrückte Ortsveränderung des Objektes durch die beiden Komponenten in Bogen größten Kreises q_g und q_s, beide gleich s (und $s = C_c + n$) dargestellt wird.

Es ist hier der Ort, die auf Seite 48 gegebenen vollständigen Entwicklungen für q_s bei sehr großen Parallelkreisbogen wie sie in der Praxis der Sphärik bei den Durchgangsbeobachtungen von Sternen, die dem Pol P sehr nahe sind, vorkommen, durch ein entsprechendes Beispiel zu erläutern und zu erproben. Bei einem Fernrohrgesichtsfelde, dessen Mikrometer bis zu 20′ Abstand (in Bogen größten Kreises) von seiner Mitte die Bilder der Objekte einzustellen gestattet, wollen wir für einen Stern, dessen Poldistanz $= 0^0,5$ sein möge, annehmen, daß er bei einem Winkel $Q = 42^0$ eingestellt sei, den sein Polkreis JS mit dem Polkreise der Mitte des Gesichtsfeldes (bezeichnet mit JS_0) machte. Es handelt sich

darum, ausser der Komponente q_g, die sich in Bogen größten Kreises aus der Formel $\sin q_g = \frac{\sin Q}{\sin s}$ ergibt, auch die sogenannte Krümmungskomponente q_s mit aller Schärfe zu bestimmen. Nach den Formeln auf Seite 47 und 48 haben wir zunächst

$$\operatorname{tang} q_s^o = \sin 1^\circ \sin^2 21^\circ$$

und hieraus $$q_s^o = 7'\,42'',315$$

sodann $$q_s - q_s^o = q_s^o \times \operatorname{tang} q^o \times \operatorname{tang} s \times = +\,0'',009$$

also $$q_s = 7'\,42'',324$$

Dagegen ergibt die direkte Formel

$$\operatorname{tang}(s - q_s) = \operatorname{tang} s \cdot \cos Q$$

ebenfalls $$q_s = 7'\,42'',324$$

Die Formel mit den logarithmischen Differenzen ergibt etwas weniger scharf $$q_s - q_s^o = +\,0''008$$

Endlich findet man $$q_g = 20'\,4'',428$$

Die Ableitung der beiden sphärischen Koordinaten g und s, in dem System J & W, aus den Ablesungen der beiden Kreise des betreffenden sphärischen Universalinstrumentes, darf in ihren Grundzügen durch obige Darlegungen, von Seite 27 ab, als hinreichend geordnet gelten, mit einstweiligem Verzichte auf die Einzelheiten der Ablesungen und Einstellungen und auf gewisse strengere Untersuchungen, welche wohl besser erst nach der Theorie der besonderen instrumentalen Koordinatensysteme und ihres Anschlusses an die natürlichen Koordinatensysteme erörtert werden.

Der Übergang von dem instrumentalen System auf das benachbarte natürliche Koordinatensystem.

Es ist oben angenommen worden, daß nicht nur die Lage der zweiten Achse (K) des Instrumentes gegen seine erste oder Hauptachse (J), sondern auch die Lage der zentralen Visierachse gegen die zweite Achse der Bedingung der Rechtwinkligkeit sehr nahe, nämlich bis auf Winkelgrößen erster Ordnung (siehe Seite 31), genügen, sondern daß auch der Pol J der Hauptachse mit dem Pole V desjenigen natürlichen Koordinatensystems nahe zusammenfalle, in welchem das Instrument die sphärischen Koordinaten γ und σ zu messen bestimmt ist, und daß der Leitpunkt W den beiden Systemen gemeinsam ist.

Des weiteren ist nun erforderlich die Lage des Systems J & W zu dem System V & W vollständig zu bestimmen, um den Übergang von den Koordinaten g und s, die einem gewissermaßen sub-

jektiv, lokal und veränderlich fundierten System angehören, auf die Koordinaten γ und σ zu machen, die einem allgemeingültigeren und viel beständigeren natürlichen System angehören.

In Fig. 6 möge der Abstand im Bogen größten Kreises zwischen den Polen J und V bezeichnet werden mit χ und der Winkel WVJ (in der Figur gezählt gegen den Sinn der Uhrzeigerbewegung) mit γ_i, ebenso wie der entsprechende Winkel $180^0 - WJV$ mit g_v. Ist dann der Winkel WVS, in demselben Sinne wie WVJ gezählt, wie oben schon generell eingeführt, mit γ und, wie bisher, der Winkel WJS mit g bezeichnet, sowie schließlich VS mit σ und JS, wie bisher, mit s, so hat man in dem sphärischen Dreieck VJS, in welchem der Winkel $JVS = \gamma - \gamma_i$ und der Winkel $VJS = 180^0 - (g - g_v)$ ist, die folgenden drei Grundgleichungen, die wir fortan die Gruppe B nennen wollen:

Fig. 6.

$$\left.\begin{aligned} \sin\sigma\sin(\gamma-\gamma_i) &= \sin s\cdot\sin(g-g_v) \\ \sin\sigma\cos(\gamma-\gamma_i) &= \cos s\cdot\sin\chi + \sin s\cdot\cos\chi\cos(g-g_v) \\ \cos\sigma &= \cos s\cdot\cos\chi - \sin s\cdot\sin\chi\cos(g-g_v) \end{aligned}\right\} B$$

Hiermit lassen sich aus g und s, welche das sphärische Instrumentalsystem uns liefert, γ und σ ableiten, sobald die Transformationselemente, nämlich χ, sowie γ_i und g_v bekannt sind.

Zur Vervollständigung der Gruppe B dienen dann noch folgende, als Gruppe C einzuführende Gleichungen in dem Dreieck WVJ:

$$\left.\begin{aligned} \sin JW\cdot\sin g_v &= \sin VW\sin\gamma_i \\ -\sin JW\cdot\cos g_v &= \cos VW\sin\chi - \sin VW\cos\chi\cos\gamma_i \end{aligned}\right\} C$$

Hieraus:

$$-\operatorname{cotg} g_v = \frac{\operatorname{cotg} VW\sin\chi - \cos\chi\cos\gamma_i}{\sin\gamma_i}$$

oder

$$-\cos g_v\sin\gamma_i = \operatorname{cotg} VW\sin\chi\cdot\sin g_v - \cos\gamma_i\sin g_v\,(1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\chi)$$

$$\sin(\gamma_i - g_v) = -\operatorname{cotg} VW\sin\chi\sin a_v - 2\cos\gamma_i\sin g_v\cdot\sin^2\tfrac{1}{2}\chi$$

Um aus vorstehenden Gleichungen möglichst einfache und rechnerisch günstige Formeln für die gesuchten Unterschiede $\gamma - g$ und $\sigma - s$ zu erlangen, beginnt man am besten mit der 3. Gleichung

der Gruppe B. Man findet leicht durch goniometrische Umformung, wenn man für σ setzt $s + \sigma - s$:

$$\cos \cdot s \cdot \cos(\sigma - s) - \sin s \sin(\sigma - s)$$
$$= \cos s - \sin s \cdot \sin \chi \cos(g - g_v) - 2 \cos s \cdot \sin^2 \tfrac{1}{2} \chi$$

oder

$$+ \sin s \sin(\sigma - s) + 2 \cos s \cdot \sin^2 \tfrac{1}{2}(\sigma - s)$$
$$= + \sin s \cdot \sin \chi \cos(g - g_v) + 2 \cos s \cdot \sin^2 \tfrac{1}{2} \chi$$

$$\sin(\sigma - s) = \sin \chi \cos(g - g_v) + 2 \operatorname{cotg} s \left[\sin^2 \tfrac{1}{2} \chi - \sin^2 \tfrac{1}{2}(\sigma - s)\right]$$

Hat man es bei der Einrichtung und Aufstellung des Instrumentes erreicht, daß χ, ebenso wie C_c und n, eine kleine Größe erster Ordnung ist, dann wird in erster Näherung und so lange $\operatorname{cotg} s$ kein Faktor von erheblicher Vergrößerungswirkung ist, zu setzen sein:

$$\sigma = s + \chi \cos(g - g_v) \ldots$$

sodann in zweiter Näherung:

$$\sigma = s + \chi \cos(g - g_v) + \tfrac{1}{2} \operatorname{cotg} s \times \chi^2 \times \sin 1'' \left[1 - \cos^2(g - g_v)\right]$$
$$= s + \chi \cos(g - g_v) + \tfrac{1}{2} \sin 1'' \times [\chi \sin(g - g_v)]^2 \times \operatorname{cotg} s \ldots$$

Für sehr kleine Werte von s endlich wird man, in ähnlicher Weise, wie oben bei der Berechnung von ΔK, eine Entwicklung wählen, die um so genauere und einfachere Form hat, je kleiner s ist, nämlich:

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} \sigma = \sin^2 \tfrac{1}{2}(s + \chi) - \sin s \cdot \sin \chi \sin^2 \tfrac{1}{2}(g - g_v)$$

oder durch $\frac{1}{4} \sin^2 1''$ geteilt, nach der abgekürzten Sinusreihe:

$$\sigma^2 = s^2 + \chi^2 + 2 s \times \chi \left[1 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}(g - g_v)\right] \ldots$$
$$\sigma^2 = s^2 + \chi^2 + 2 s \times \chi \cos(g - g_v) \ldots$$

Diese Formel ist dann nichts anderes als der sogenannte Cosinussatz im geradlinigen Dreieck, als welches das sphärische Dreieck VJS hier bei der Kleinheit der Seitenlängen s, χ und σ behandelt werden darf.

Für die Koordinate γ gestaltet sich die Entwicklung folgendermaßen. Aus der ersten und zweiten Gleichung der Gruppe B ergibt sich:

$$\operatorname{cotg}(\gamma - \gamma_i) = \frac{\operatorname{cotg} s \sin \chi}{\sin(g - g_v)} + \cos \chi \operatorname{cotg}(g - g_v)$$

und hieraus

$$\sin\left[(\gamma - \gamma_i) - (g - g_v)\right] = - \operatorname{cotg} s \sin \chi \sin(\gamma - \gamma_i)$$
$$+ 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \chi \cos g - g_v) \sin(\gamma - \gamma_i)$$

oder mit Rücksicht auf die erste Gleichung der Gruppe B:

$$\sin[(\gamma-\gamma_i)-(g-g_v)] = -\sin\chi\sin(g-g_v)\frac{\cos s}{\sin\sigma}$$
$$+\,2\sin^2\tfrac{1}{2}\chi\cos(g-g_v)\sin(g-g_v)\frac{\sin s}{\sin\sigma}.$$

So lange χ als eine Größe erster Ordnung angesehen werden kann, darf das zweite Glied rechts, da $\frac{\sin s}{\sin\sigma}$ nahe gleich Eins und keinesfalls in den Parallelkreisen, die von den Polen J und V um mehr als 1° abstehen, ein merklicher Vergrößerungsfaktor ist, vernachlässigt werden, so daß man hat:

$$\sin[(\gamma-g)-(\gamma_i-g_v)] = -\sin\chi\sin(g-g_v)\frac{\cos s}{\sin\sigma}\ldots$$

Wenn man den Vergrößerungsfaktor $\frac{\cos s}{\sin\sigma}$ (siehe auch die obigen Untersuchungen über die Genauigkeit der Angaben in Einheiten sphärischer Winkel oder Parallelkreisbogen) einstweilen hier für die höheren Glieder als unerheblich erachtet, hat man in erster Näherung, nachdem man die Gleichung mit $\sin 1''$ dividiert und $\cos s = \cos[\sigma + s - \sigma]$ rechts eingetragen und entwickelt hat:

$$\gamma = g + (\gamma_i - g_v) - \chi\sin(g-g_v)[\operatorname{cotg}\sigma\cdot\cos(s-\sigma) - \sin(s-\sigma)]\ldots$$

und mit weiterer Vernachlässigung der Glieder von der Ordnung $\chi^3\cdot\operatorname{cotg}\sigma$ und χ^2

$$\gamma = g + (\gamma_i - g_v) - \chi\sin(g-g_v)\operatorname{cotg}\sigma\ldots$$

Trägt man endlich hier den obigen, in entsprechender Näherung aus der Gleichungsgruppe C entwickelten Wert von $\gamma_i - g_v$ ein, so hat man:

$$\gamma = g - \chi\sin g_v\operatorname{cotg} VW - \chi\sin(g-g_v)\operatorname{cotg}\sigma\ldots$$

Will man dagegen auf der rechten Seite homogen im letzten Gliede s statt σ einführen, so hätte man leicht:

$$\gamma = g - \chi\sin g_v\operatorname{cotg} VW$$
$$-\,\chi\sin(g-g_v)\operatorname{cotg} s\,[1-\operatorname{cotg} s\cdot\sin(\sigma-s)]\ldots$$

Wenn man kurz setzt:

$$g - \chi\sin g_v\operatorname{cotg} VW = g^0$$

hätten wir also zusammenfassend:

$$\gamma = g^0 - \chi \sin(g - g_v) \operatorname{cotg} s + \chi \sin(g - g_v) \operatorname{cotg}^2 s\, (\sigma - s) \sin 1'' \ldots$$

$$\sigma = s + \chi \cos(g - g_v) + \tfrac{1}{2} \operatorname{cotg} s\, [\chi \sin(g - g_v)]^2 \sin 1'' \ldots$$

Setzt man kurz

$$- \chi \sin(g - g_v) \operatorname{cotg} s = \varDelta g^0$$

$$+ \chi \cos(g - g_v) \qquad = \varDelta s$$

so hat man mit hinreichender Näherung bis zu Werten von s herab, die bei Werten von χ unterhalb der Bogenminute auch nur größer zu sein brauchen, als wenige Zehner der Bogenminute:

$$\gamma = g^0 + \varDelta g^0 - \sin 1'' \times \varDelta g^0 \times \varDelta s \times \operatorname{cotg} s \ldots$$

$$\sigma = s + \varDelta s + \tfrac{1}{2} \sin 1'' \times \varDelta g^0 \times \varDelta g^0 \times \operatorname{tang} s \ldots$$

eine Formel, die bei vielen ähnlichen Aufgaben innerhalb der Astrometrie ihre analoge Anwendung finden kann.

In unmittelbarster Nähe des Poles V wird man schließlich ähnlich verfahren müssen, wie oben bei Q, d. h. man zerlegt die im Parallelkreisbogen ausgedrückte Veränderung $\varDelta g^0$ in ihre beiden rechtwinkligen Komponenten in Winkeleinheiten größten Kreises, nämlich

$$(\gamma - g^0) \sin \sigma \text{ und } \frac{\sin 2\sigma}{\sin 1''} \sin^2 \tfrac{1}{2} \varDelta g^0$$

wo also:

$$(\gamma - g^0) \sin \sigma = - \chi \sin(g - g_v) \operatorname{cotg} s \times \sin \sigma$$
$$- \sin 1'' \times \varDelta g^0 \times \varDelta s \times \operatorname{cotg} s \cdot \sin \sigma,$$

oder auch nach dem vorangehenden Ausdruck

$$(\gamma - g^0) \sin \sigma = - \chi \sin(g - g_v) \cos \sigma \ldots$$

und ferner:

$$\frac{\sin 2\sigma}{\sin 1''} \times \sin^2 \tfrac{1}{2} \varDelta g^0 = \tfrac{1}{2} \sin 1''\, \chi^2 \times \sin^2 (g - g_v) \cos^2 \sigma \operatorname{cotg} \sigma \ldots$$

In der Praxis werden unter den obigen Voraussetzungen betreffend die Größe von χ, also bei naher Berichtigung der Lage des Poles J des instrumentalen Koordinatensystems zu dem Pole V des entsprechenden natürlichen Koordinatensystems, in allen Poldistanzen, die größer sind als 1°, die einfachen Formeln ausreichen:

$$\sigma = s + \chi \cos(g - g_v) \ldots \qquad = s + \Delta s$$
$$g^0 = g - \chi \sin g_v \operatorname{cotg} VW \ldots$$
$$\gamma = g^0 - \chi \sin(g - g_v) \operatorname{cotg} \sigma \ldots = g^0 + \Delta g^0$$

Der Ausdruck für g^0 zeigt deutlich, was schon oben bei der Erörterung der Wahl des Leitpunktes W zur Sprache gekommen war, daß der Abstand VW des Leitpunktes vom Polpunkte möglichst nahe gleich 90° sein sollte, um auch hier die durch den Faktor cotg VW bedingte Vergrößerung des Einflusses der Transformationselemente χ und g_v, nämlich der kleinen Unsicherheiten ihrer Bestimmung und der Veränderlichkeiten ihrer Werte, tunlichst einzuschränken. Zusammenfassend hätten wir, nach sämtlichen obigen Darlegungen in betreff der Ermittlung von g und s, die folgenden Ausdrücke für γ und σ:

$$\begin{matrix}\text{Lage I} \\ \text{Lage II}\end{matrix} \; \gamma = \left.\begin{matrix} G' - G_w + 90^0 + Q \\ G'' - G_w - 90^0 - Q \end{matrix}\right\} - \chi \sin g_v \operatorname{cotg} VW$$
$$- \chi \sin(g - g_v) \operatorname{cotg} \sigma \ldots$$

$$\begin{matrix}\text{Lage I} \\ \text{Lage II}\end{matrix} \; \sigma = \left.\begin{matrix} S' - S_i \\ S_i - S'' \end{matrix}\right\} + \chi \cos(g - g_v) \ldots$$

oder wenn wir den Ausdruck $90^0 - G_w$ (wie oben) kurz mit ΔG bezeichnen, ferner analog die Ablesung S_i, welche durch Einstellung eines Objektes von festen Koordinaten in beiden Lagen durch die Gleichung $\frac{S' + S''}{2} = S_i$ gefunden wird, in der Form $-S_i = \Delta S$ einführen:

$$\gamma = \left.\begin{matrix} G' + \Delta G + Q \\ G'' \pm 180^0 + \Delta G - Q \end{matrix}\right\} - \chi \sin g_v \operatorname{cotg} VW$$
$$- \chi \sin(g - g_v) \operatorname{cotg} \sigma \ldots$$
$$\sigma = \left.\begin{matrix} S' + \Delta S \\ 360 - (S'' + \Delta S) \end{matrix}\right\} + \chi \cos(g - g_v) \ldots$$

Hier ist im allgemeinen bei gehöriger Berichtigung des Instrumentes

$$Q = n \operatorname{cotg} s + C_c \operatorname{cosec} s \ldots$$

Die Ermittelung von $\Delta G = 90^0 - G_w$ wird erst in den einzelnen besonderen Systemen je nach der Wahl des Leitpunktes, zugleich mit der Bestimmung von VW und überhaupt mit der Ermittelung der Transformationselemente, zur Sprache kommen können.

In einem dieser besonderen Fälle wird es übrigens von Vorteil

sein, die obige Relation $g_v = \gamma_i + \chi \sin g_v \operatorname{cotg} VW$ in den Ausdruck $g - g_v$ einzuführen. Man hat dann $g - g_v = g^0 - \gamma_i$ und ebenso auch $g - \chi \sin [\gamma_i + \chi \sin g_v \operatorname{cotg} VW] \times \operatorname{cotg} VW = g^0$ oder ausreichend auch $g - \chi \sin \gamma_i \operatorname{cotg} VW \cdot\cdot = g^0$.

Die natürlichen sphärischen Koordinatensysteme und die besonderen Bezeichnungen in denselben.

Von den natürlichen Koordinatensystemen, auf die wir jetzt, mit Anwendung der vorstehenden Transformationsgleichungen, von den Koordinatenbestimmungen in den instrumentalen Systemen übergehen wollen, kommen für die unmittelbare Messung nur das Drehungs- oder Äquatorialsystem und das Niveau- oder Horizontalsystem in Betracht. Das erstere hat den Polpunkt P der täglichen Drehung der Erde zum Polpunkt und zum Leitpunkt entweder den Pol E der mittleren Bahnebene der jährlichen Bewegung der Erde oder den sphärischen Ort Z der Lotrichtung; das andere hat den sphärischen Ort des Lotes (den Pol des Niveaus oder des Horizontes) zum Polpunkt und zum Leitpunkt den Pol der täglichen Drehung. Dasjenige System, welches E zum Polpunkt und P zum Leitpunkt hat, findet keine instrumentale Anwendung mehr, sondern nur noch rechnerische Verwertung, während es in der Vergangenheit, von Hipparch (140 v. Chr.) bis gegen Ende des 17. Jahrhunderts, auch noch instrumental dargestellt und zu Messungen benutzt wurde, und zwar in Betracht des Umstandes, daß sein Polpunkt E erheblich kleinere Ortsveränderungen am Sternhimmel erfährt, als der Pol P der täglichen Drehung, wogegen es den großen Nachteil hat, daß sein Polpunkt E seine Lage zum Horizont unablässig ändert.

Das Äquatorialsystem.

Wir wollen mit dem Äquatorialsystem beginnen. Das zugehörige Äquatorialinstrument hat eine Hauptachse, die so gelagert ist, daß ihr Polpunkt J in einem möglichst kleinen Abstand χ von dem Polpunkt P der täglichen Drehung der Erde und der scheinbaren täglichen Drehung der Sternsphäre liegt. Da die Lagerung dieser Achse des Instruments mit der Erde möglichst fest verbunden ist, so wird man als den Leitpunkt des instrumentalen Äquatorial-Koordinatensystems auch nur einen Punkt an der Sphäre wählen dürfen, in welchem eine ebenso fest mit der Erde verbundene Richtung dieselbe trifft. Eine solche Richtung finden wir, wie oben dargelegt, in der größten Vollkommenheit in der Lotrichtung und als ihren Polpunkt Z, während die andere, nahezu ebenso fest zum Erdkörper sich verhaltende Richtung, nämlich die durch den Ort der Beobachtung parallel zur Drehungsachse der Erde gelegte Richtung, deren Polpunkt P ist, für die Lage des Polpunktes J der

Hauptachse des Instrumentes maßgebend ist. Das Äquatorialinstrument und das ihm entsprechende Koordinatensystem an der Sphäre hat also zum Leitpunkt *W* das Zenit *Z*.

Fig. 7 stellt diese Festsetzungen dar und enthält zugleich auch denjenigen Leitkreis *PE*, der am Sternhimmel eine beständige (während eines ganzen Tages nur um nahezu 0″,14 sich verändernde) Lage hat, wogegen der mit der Erde fest verbundene natürliche Leitkreis *PZ* unablässig und mit größter Regelmäßigkeit seinen Winkel *EPZ* mit dem am Himmel festen Leitkreise *PE* in der Richtung der längeren, an *PZ* angeschlossenen Pfeilspitze ändert.

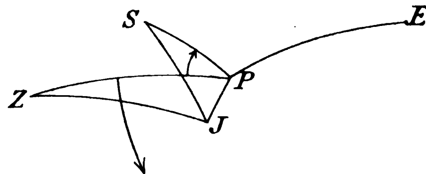


Fig. 7.

Es erscheint nun zweckmäßig, die Winkelkoordinaten *ZPS* und *ZJS*, die wir nach dem allgemeinen Schema mit γ und g bezeichnet haben, hier in der durch die kürzere Pfeilspitze zwischen *PZ* und *PS* dargestellten Richtung der scheinbaren Drehung des Sternhimmels, also entgegengesetzt der die wirkliche Drehungsrichtung von *PZ* um *P* markierenden Pfeilspitze zu zählen.

In dem System *P* & *E* werden dagegen die Winkel am Pole *P* gegen die feste Leitlinie *PE* in dem Sinne der letzteren Drehungsrichtung gezählt, und zwar gelten in diesem System, in welchem die eigentlichen fundamentalen und stetigen, nur langsam veränderlichen Koordinaten der Fixsterne gemessen und registriert werden, die folgenden Bezeichnungen:

Die Winkelkoordinate γ wird hier ausgedrückt durch $90^\circ + \alpha$ und die Bogenkoordinate σ durch $90^\circ - \delta$.

Der Winkel α wird Rektaszension oder Geradeaufsteigung, der Bogen δ wird Deklination oder Abweichung genannt. Das erstere Wort hängt damit zusammen, daß die Zählung von α nicht in der Leitlinie *PE*, sondern 90° vorwärts von dieser, in der Richtung der wirklichen Drehung von *PZ* um *P* gezählt, ihren Anfang nimmt, also in dem größten Kreise, in welchem die Sonne, deren veränderlicher Ort am Himmel in der Distanz 90° von *E* die Erdbewegung um die Sonne darstellt, genau um 90° auch von dem Pole *P* absteht und zugleich ihre Distanz von diesem Pole im Sinne der Annäherung

an denselben, also einer in die nördliche Himmelshalbkugel aufsteigenden Bewegung, und zwar mit dem Maximum der Geschwindigkeit ändert.

Weiter unten wird gezeigt werden, welche Bedeutung die Größe dieser Änderungsgeschwindigkeit für die Erreichung der größten Genauigkeit der Bestimmung des Winkels hat, welchen der durch den jeweiligen Sonnenort am Himmel (bezeichnet mit ⊙) gelegte Polkreis *P*⊙ mit der Leitlinie *PE* bildet, so daß in der Nähe der Epochen, in denen dieser Winkel *EP*⊙ nahe gleich $\pm 90^\circ$ ist, und in denen eben die größte Geschwindigkeit der Änderung der Poldistanz *P*⊙ stattfindet, aus der Bestimmung des Winkels *EP*⊙ durch die Messung von *P*⊙ und die gleichzeitige Messung des Winkels, welchen *P*⊙ mit den Polkreisen *PS* von Fixsternen bildet, auch die genauesten Bestimmungen von Winkeln *EPS* oder der Lage der Leitlinie *PE* am Sternhimmel erfolgen können.

Der Name „Geradeaufsteigung" für den Winkel α ist aber durch vorstehenden Sachverhalt nur in betreff des Wortes „Aufsteigung" — nämlich Zählung von demjenigen Polkreise *P*⊙ anfangend, von welchem ab die Sonne in die nördliche Himmelshalbkugel aufsteigt — verständlich gemacht. Das Wort „Gerade" rührt von einer nominellen Unterscheidung her, welche die griechischen Astronomen zwischen dem „geraden" System, nämlich dem System der täglichen Drehung, und andrerseits dem „schiefen" System, nämlich dem System der jährlichen Bewegung der Erde (siehe auch „Schiefe" der Ekliptik) machten. Der Pol *P* des ersteren Systems und sein größter Kreis, der Äquator, behaupteten auch eine beständige, in gewissem Sinne fundamentale Lage zum Horizonte, während die Ekliptik ihre Lage zum Horizonte beständig änderte und in den verschiedenen Phasen der Drehungsbewegung ihres Poles *E* um den Pol *P* gegen die zum Horizonte festliegende Leitlinie *PZ*, den sogenannten Mittagskreis, sehr unsymmetrische und schräge Lagen annehmen konnte. „Geradeaufsteigung" bedeutete also „Winkelmessung im geraden System und beginnend von dem Orte der stärksten Geschwindigkeit der aufsteigenden Bewegungskomponente der Sonne in der Richtung nach dem über dem Horizonte liegenden Pole des geraden Systems".

Das Wort „Deklination" oder Abweichung wird keiner besonderen Erläuterung bedürfen. Nach der Einführungsgleichung $\sigma = 90^\circ - \delta$ wird δ positiv von dem größten Kreise ab, dessen

Pol P ist (dem Himmelsäquator), nach P hin und negativ nach dem entgegengesetzen Pol hin gezählt.

Es wäre an der Zeit, die Namen „Geradeaufsteigung“ und „Abweichung“, von denen der erstere so schwerfällig und so undenklich vielsagend, der letztere gar zu wenig sagend und zu allgemeingültig ist, endlich bei den deutsch redenden Astronomen durch eine allen Astronomen gemeinsame Wahl von besseren Namen zu ersetzen. Die Namen „Ascensio recta“ (oder etwas verstümmelt „Rectascension“) und Deklination waren immer noch besser, weil sie im Deutschen keinen Nebensinn haben. Einstweilen sind die abgekürzten Bezeichnungen α und δ, welche ziemlich allgemein in allen Ländern angenommen sind, für die deutsch redenden Astronomen eine Art von Auskunftsmittel statt jener durchaus ungeeigneten deutschen Namen. Es ist anzunehmen, daß ursprünglich in der griechischen Astronomie, ebenso wie für die ebenfalls am Pole der Erdachse gezählten Winkel, welche die Leitlinien PZ (Mittagskreise oder Meridiane) verschiedener Örter der Erdoberfläche mit dem Polkreise PZ eines bestimmten Ortes (dem Anfangsmeridiane) machen, der Ausdruck „geographische Länge“ und für die Bogenabstände der Zenitpunkte Z vom Himmelsäquator der Ausdruck „geographische Breite“ geprägt worden war, auch für den sphärischen Winkel α der Ausdruck „Länge“ und für den sphärischen Bogen δ der Ausdruck „Breite“ nahe gelegen hat. Es hat nur die offenbar von Hipparch ausgegangene Aufgebung der Angabe der Sternkoordinaten in dem geraden System mit dem Pole P, den er als zu stark mit säkularen Ortsveränderungen am Himmel behaftet erkannte, dazu geführt, die den Bezeichnungen der geographischen Koordinaten analogen Ausdrücke „Länge“ und „Breite“ nicht auch für die analogen Koordinate im „geraden“ System am Himmel ($P\&E$) einzusetzen, sondern dieselben auf die entsprechenden Koordinaten im „schrägen“ System ($E\&P$) zu übertragen.

Bekanntlich werden hiernach (es ist hier der Ort, dies sogleich mit zu ordnen) die Koordinaten γ und σ in dem letzteren System (demjenigen der Ekliptik oder der jährlichen Erdbewegung) folgendermaßen bezeichnet:

$$\gamma = PES = \lambda - 90^0 \quad \sigma = ES = 90^0 - \beta$$

und λ heißt dann einfach die Länge, sowie β die Breite. Die Längen λ werden hiernach in derselben Zählungsrichtung, wie die

α von einem durch E gelegten Polkreise aus gezählt, welcher einen Winkel von 270^0 (gleich -90^0) mit dem Leitkreise EP bildet, also ebenfalls durch denjenigen Ort der Sonne am Himmel geht, in welchem die letztere bei der aufsteigenden Bewegung nach der nördlichen Himmelshalbkugel hin genau die Poldistanz $P\odot = 90^0$ oder die Deklination $\delta = o$ passiert.

Dieser Ort der Sonne am Himmel heißt auch der „Frühlingspunkt“ und ist zugleich einer der beiden Durchschnittspunkte des Himmelsäquators und der Ekliptik.

In betreff der Ausdrücke Länge und Breite ist noch zu konstatieren, daß dieselben offenbar zuerst für die vorerwähnten geographischen Koordinaten in Gebrauch gekommen waren und zwar auf Grund des starken Überwiegens der Ausdehnung der in jenen frühen Zeiten bekannten Regionen der Erdoberfläche in der westöstlichen Richtung im Vergleich mit der viel geringeren Ausdehnung solcher bekannter Regionen in südnördlicher Richtung. Die bekannte Erdenwelt (die Oekumene) hatte die Gestalt eines relativ schmalen, von West nach Ost gerichteten Streifens. Hiernach wählte man für Koordinatenangaben in dieser letzteren Richtung den Namen „Länge“ und für die Koordinatenangaben in südnördlicher Richtung den Namen „Breite“. Übrigens ist hierzu noch zu bemerken, daß es in vieler Hinsicht zweckmäßiger wäre, die bezügliche sphärische Koordinate nicht als „Länge“, sondern auch im Deutschen als „Longitude“ und entsprechend die andere sphärische Koordinate nicht als „Breite“, sondern als „Latitude“ zu bezeichnen. Die Franzosen z. B. denken nicht daran, die geographischen Längen mit „longueur“ und die Breiten mit „largeur“ zu bezeichnen, sondern sie wenden dabei nur die Ausdrücke „longitude“ und „latitude“ an. Ähnlich die englische Sprache.

Kehren wir nun zu dem sphärischen Koordinatensystem $P\&Z$ zurück, auf welches allein von einem äquatorialen Instrumentalsystem unmittelbar übergegangen werden kann, während, wie soeben näher erläutert worden ist, die Koordinatenangaben der Sterne in dem System $P\&E$ nach α und δ verzeichnet werden. Da nun die Leitlinie PZ des natürlichen Systems $P\&Z$, welche allein eine nahezu feste Lage zu der Leitlinie JZ des äquatorialen Instrumentalsystems haben kann, unablässig um den Pol P eine Drehung gegen die an der Sphäre während einer vollen Umdrehung nahezu feste Leitlinie PE erleidet, müssen wir, um von den Koordinaten γ in dem System

mit der Leitlinie PZ auf die schließlich gesuchten Koordinatenausdrücke in dem System $P\&E$ übergehen zu können, Mittel und Wege finden, um für jeden Zeitpunkt einer Einstellung an unserm Äquatorialinstrument die Drehungsphase von PZ gegen PE oder den Winkel EPZ angeben zu können, welchen wir, entsprechend den obigen Festsetzungen, mit $90^\circ + \alpha_z$ bezeichnen, gerade so wie wir die Poldistanz PZ (in den allgemeinen Formeln oben durch VW ausgedrückt) hier mit $90^\circ - \delta_z$ bezeichnen wollen.

Sobald wir für den Zeitpunkt einer in dem instrumentalen System $J\&Z$ ausgeführten Beobachtung der Koordinaten g und s des Objektes S die Koordinaten α_z und δ_z des Leitpunktes Z in dem System $P\&E$ kennen, und sobald wir außerdem die Transformationselemente von dem System $J\&Z$ in das System $P\&Z$ ermittelt haben, vermögen wir die gesuchten Koordinaten α und δ des Objekts zu bestimmen.

Die Winkelkoordinate γ in dem System $P\&Z$, auf welche wir zunächst nach den Formeln auf Seite 68 von g übergehen können, nämlich ZPS, ist nun nichts anders als $EPZ - EPS = (90^\circ + \alpha_z) - (90^\circ + \alpha) = \alpha_z - \alpha$. Für diese Unterschiede zwischen der Rektaszension des Zenits und der Rektaszension des Beobachtungsobjektes S hat man nun, wegen der unablässigen und entscheidenden Wichtigkeit, welche diese Unterschiede bei jeder sphärischen Ortsbestimmung eines Objektes durch Elimination der augenblicklichen Drehungsphase der Leitlinie PZ oder des Ortsmeridianes um P haben, den Ausdruck „Stundenwinkel" geprägt und dafür die kurze Bezeichnung τ mit der oben schon charakterisierten Zählungsrichtung, entsprechend der scheinbaren Drehung des Sternhimmels gegen PZ, eingeführt. Die jeweilige Kenntnis von α_z, also der Rektaszension des Zenits des Beobachtungsortes, erlangen wir nun mit Hilfe der Ausmessung und Einteilung der täglichen Drehung der Sternsphäre durch die zeitmessenden Apparate, die feinsten Pendeluhren und in gewissen Fällen und Aufgaben der Praxis auch der Chronometer, worüber in folgenden Heften näheres. Hier wollen wir einstweilen annehmen, daß wir in den bezüglichen Einrichtungen die Mittel und Wege besitzen, um wenigstens tagelang die Veränderungen von α_z mit einer der Genauigkeit der sonstigen Winkelmessungen mit den eingeteilten Kreisen entsprechenden Sicherheit anzugeben.

Wegen dieser Bedeutung von α_z als Zeitgröße und Zeitmaß führt dieser Winkelausdruck auch den Namen „Sternzeit", ebenso

wie δ_z, die Deklination des Zenits, wegen der Bedeutung dieses Winkels in der geodätischen und geographischen Messung und Orientierung auch als die geographische Breite des Beobachtungsortes bezeichnet wird.

Tragen wir nun τ für γ, $90^\circ - \delta$ für σ, ferner τ_i für γ_i, sowie $90^\circ - \delta_z$ für VW in die Gleichungen der Seiten 68 und 69 ein, während wir g, g^0, s, g_v und ebenso die G und S und die sonstige Bezeichnung für die instrumentalen Elemente generell beibehalten, dann haben wir:

$$g^0 = g - \chi \sin \tau_i \operatorname{tang} \delta_z$$
$$\tau = g^0 - \chi \sin (g^0 - \tau_i) \operatorname{tang} \delta \ldots$$
$$\delta = 90^\circ - s - \chi \cos (g^0 - \tau_i) \ldots$$

In Fig. 8 ist der Winkel ZPJ, und zwar der äußere, mit einem Parallelkreisbogen umzogene und in einer Pfeilspitze abschließende Winkel, gleich dem τ_i der vorstehenden Formeln. Wenn wir nun von J auf die Leitlinie PZ das sphärische Perpendikel JJ_p fällen, so haben wir in dem Dreieck PJJ_p folgende Relationen:

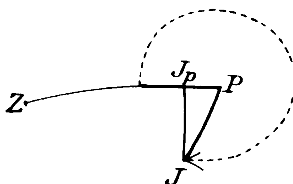


Fig. 8.

$$\sin JJ_p = \sin PJ \times \sin JPJ_p$$
$$\operatorname{tang} PJ_p = \operatorname{tang} PJ \times \cos JPJ_p$$

Nun ist $PJ = \chi$, also eine kleine Winkelgröße, bei welcher der Sinus gleich dem Bogen gesetzt werden kann. Dasselbe darf man aber nach den beiden Gleichungen dann auch annehmen für JJ_p und für PJ_p. Man kann also, da nach der Fig. 8 der Winkel JPJ_p gleich $360^\circ - \tau_i$ ist, ansetzen

$$JJ_p = -\chi \sin \tau_i \text{ und } PJ_p = \chi \cos \tau_i.$$

Setzt man nun $\chi \sin \tau_i = \eta$ und $\chi \cos \tau_i = \xi$ (in dem Falle der Fig. 8 ist dann ξ positiv, η negativ) so kann man die obigen Gleichungen folgendermaßen durch die beiden rechtwinkligen Komponenten des Transformationselementes χ ausdrücken:

$$g^0 = g - \eta \operatorname{tang} \delta_z$$
$$\tau = g^0 - (\xi \sin g^0 - \eta \cos g^0) \operatorname{tang} \delta \ldots$$
$$\delta = 90^\circ - s - (\xi \cos g^0 + \eta \sin g^0) \ldots$$

Um jetzt α in die Gleichung τ eintragen zu können, hat man, zunächst hypothetisch, α_z einzuführen, und zwar mit Hilfe der oben erwähnten Zeitmessungseinrichtungen, welche es gestatten, die Veränderungen von α_z für ganze, tagelange Beobachtungsreihen anzugeben. Nennen wir eine solche, im Augenblick der Beobachtung festgestellte Uhrzeit U und drücken wir die zugehörige Rektaszension des Zenits α_z hypothetisch durch die Gleichung aus:

$$\alpha_z = U + \varDelta U$$

wo $\varDelta U$ die zunächst unbekannte, jedenfalls aber nur langsam und in sehr nahe bekannter Weise veränderliche Uhrkorrektion bezeichnet. Man würde dann statt der obigen Gleichung für τ die folgende für α haben, da $\tau = \alpha_z - \alpha = U + \varDelta U - \alpha$

$$\alpha = U + \varDelta U - g^0 + (\xi \sin g^0 - \eta \cos g^0) \operatorname{tang} \delta \ldots$$

oder wenn wir für g^0 seinen vollständigen Ausdruck nach den obigen Festsetzungen eintragen:

in Lage I

$$\alpha = U' - G' + \varDelta U - \varDelta G + \eta \operatorname{tang} \delta_z - C_c \operatorname{cosec} s$$
$$- n \operatorname{cotg} s + (\xi \sin g^0 - \eta \cos g^0) \operatorname{tang} \delta \ldots$$

in Lage II

$$\alpha = U'' - (G'' - 180^0) + \varDelta U - \varDelta G + \eta \operatorname{tang} \delta_z + C_c \operatorname{cosec} s$$
$$+ n \operatorname{cotg} s + (\xi \sin g^0 - \eta \cos g^0) \operatorname{tang} \delta \ldots$$

Liegen die beiden Uhrzeiten U' und U'' der Einstellungen und Ablesungen in den beiden Lagen nicht nahe genug zusammen, so wird man die $\varDelta U$ und die g^0 in den beiden Gleichungen nicht als völlig identisch betrachten dürfen, aber sehr leicht die bezüglichen kleinen Verschiedenheiten rechnerisch berücksichtigen. Sehen wir hiervon ab, so gibt das Mittel aus den beiden Gleichungen:

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(U' + U'') - \tfrac{1}{2}(G' + G'' - 180^0) + \varDelta U - \varDelta G$$
$$+ \eta \operatorname{tang} \delta_z + (\xi \sin g^0 - \eta \cos g^0) \operatorname{tang} \delta \ldots$$

und in entsprechender Form die Gleichung für δ im Mittelwert aus beiden Lagen

$$\delta = 90^0 - \tfrac{1}{2}(S' - S'') - (\xi \cos g^0 + \eta \sin g^0) \ldots$$

Wir wollen zur Abkürzung setzen

$$\tfrac{1}{2}(U' + U'') = U$$
$$\tfrac{1}{2}(G' + G'' - 180^0) = G$$
$$90^0 - \tfrac{1}{2}(S' - S'') = d$$

wobei, wenn es nicht möglich ist, in beiden Lagen die äquivalenten korrespondierenden Beobachtungen anzustellen, angenommen werden darf, daß G aus der Beobachtung in der einen der beiden Lagen mit Anbringung der bezüglichen Korrektionen $\pm C_c \operatorname{cosec} s \pm n \operatorname{cotg} s$ (wo auch meistens statt s gesetzt worden $90^\circ - \delta$) hervorgegangen ist. Zieht man dann einstweilen das Aggregat der Korrektionen, welche von den Koordinaten des Objektes unabhängig sind, nämlich $\Delta U - \Delta G + \eta \operatorname{tang} \delta_*$ unter der kurzen Bezeichnung Δ zusammen, so hätte man:

$$\alpha = U - G + \Delta + (\xi \sin g^0 - \eta \cos g^0) \operatorname{tang} \delta \ldots$$
$$\delta = d - (\xi \cos g^0 + \eta \sin g^0) \ldots$$

Diese beiden Gleichungen enthalten in einfachster Gestalt die Grundzüge der Theorie und der Vorschriften für die Anwendung des Äquatorialinstrumentes. Allerdings müssen für die feinere Untersuchung des Instrumentes und seine genauere Anwendung zur Koordinatenbestimmung im System $P \& E$ noch eine Reihe von Verbesserungen in Betracht gezogen werden, insbesondere die Berücksichtigung der Strahlenbrechung in der Atmosphäre, durch welche die Koordinaten α und δ der Gestirne, je nach der Lage derselben zum Zenit und je nach den atmosphärischen Zuständen, innerhalb gewisser Grenzen veränderlich gemacht werden, sodann auch die kleinen, in verschiedenen Drehungsphasen verschiedenen Gestaltänderungen und Lagenänderungen der Achse K des Instrumentes gegen die Achse J und der Visierachse gegen die Achse K, alles unter der Wirkung der Schwere und der Biegsamkeit auch der besten Konstruktionsanordnungen und besten Materials derselben. Indem wir alle diese Untersuchungen und Verbesserungen, sowie auch die Fehlerquellen bei den Kreisablesungen und den mikrometrischen Einstellungen der Visierachse einem späteren Hefte vorbehalten, wollen wir jetzt bloß die praktische Verwertung der obigen Grundgleichungen des Äquatorials in Kürze erörtern.

Die Bestimmung der Transformationselemente vom Äquatorialinstrumente in das natürliche Äquatorialsystem.

Es handelt sich zunächst, ohne bereits genaue Kenntnis von den Koordinaten α und δ sowie von α_* zu haben, darum, die Transformationselemente ξ und η zu ermitteln. Mit diesen beiden Komponenten von χ, nämlich der Länge η des sphärischen Perpendikels von J auf PZ und dem Abstande ξ des Fußpunktes dieses Perpendikels von dem Pole P (η positiv von PZ aus genommen nach der Seite der wachsenden Stundenwinkel, ξ positiv von P

aus genommen nach Z hin) findet man nach den Einführungsgleichungen:

$$\chi^2 = \xi^2 + \eta^2 \ldots$$
$$\sin \tau_i = \frac{\eta}{\chi} \quad \cos \tau_i = \frac{\xi}{\chi}$$

und $g_v = \tau_i + \eta \operatorname{tang} \delta_z$, wobei für δ_z ein leicht beschaffter Näherungswert ausreicht.

Um nun ξ und η frei von der Kenntnis (wenigstens frei von der genauen Kenntnis) von α, α_z und δ, wenn auch im Besitz der Kenntnis von Näherungswerten dieser Koordinaten und der kleinen Veränderungen von α und δ durch die vorerwähnte Strahlenbrechung, sowie durch die Lagenänderungen auch der natürlichen Koordinatensysteme, zu ermitteln, hat man ξ und η einfach aus den Differenzen von Gleichungen der obigen Art zu bestimmen. Hierbei darf und muß man auf einen gewissen Grad von wenigstens tagelanger Beständigkeit dieser Koordinaten von J im System PZ rechnen, was bei guten instrumentalen Einrichtungen auch zu erreichen ist, ebenso wie die gehörige Beständigkeit von ΔU oder die Kenntnis der kleinen gesetzmäßigen Veränderungen dieser Korrektion, wodurch dieselbe rechnerisch sozusagen in eine hinreichend beständige Größe verwandelt werden kann.

Von einem Fixstern S sei zur Uhrzeit U_1 beobachtet G_1, als das Resultat der Ablesungen des Kreises der Hauptachse entweder $G_1 = \frac{1}{2}(G'_1 + G''_1 - 180^\circ)$ oder $G'_1 + Q$ oder $G''_1 - 180^\circ - Q$ und $Q = C_c \sec d_1 + n \operatorname{tang} d_1$, ebenso d_1, als das Resultat der Ablesungen (S) des Kreises der zweiten Achse (nach den Angaben von Seite 76 unten). Aus G_1 sei dann abgeleitet $g_1^0 = G_1 + \Delta G - \eta \operatorname{tang} \delta_z$, wobei für ΔG, η, δ_z Näherungswerte genügen, weil g_1^0 hier bloß für die Bestimmung der Koeffizienten von ξ und η erforderlich ist. (Über eine direkte und genaue Bestimmung von ΔG zur Ermittelung der α oder der ΔU siehe weiter unten.) Ganz entsprechend seien für denselben Stern beobachtet:

zur Uhrzeit U_2 die Kreisablesungsergebnisse G_2, d_2 und der Näherungswert g_2^0,

zur Uhrzeit U_3 die Kreisablesungsergebnisse G_3, d_3 und der Näherungswert g_3^0,

zur Uhrzeit U_4 die Kreisablesungsergebnisse G_4, d_4 und der Näherungswert g_4^0.

Zur Abkürzung sollen die Differenzen $U - G$ mit A bezeichnet werden.

Es mögen nun zur Erleichterung der Berechnung zunächst zwischen den verschiedenen g die folgenden runden Unterschiede eingehalten sein:

$$g_2^\circ = g_1^\circ + 90^\circ \quad g_3^\circ = g_1^\circ + 180^\circ \quad g_4^\circ = g_1^\circ + 270^\circ.$$

Endlich seien für die Koordinaten des Sternes die folgenden Näherungswerte vorhanden:

$$\begin{array}{llllll} \text{zur Uhrzeit} & U_1 \ldots \alpha_0 + \varDelta\alpha_1 \ldots \delta_0 + \varDelta\delta_1 \\ \text{„} & \text{„} \quad U_2 \ldots \alpha_0 + \varDelta\alpha_2 \ldots \delta_0 + \varDelta\delta_2 \\ \text{„} & \text{„} \quad U_3 \ldots \alpha_0 + \varDelta\alpha_3 \ldots \delta_0 + \varDelta\delta_3 \\ \text{„} & \text{„} \quad U_4 \ldots \alpha_0 + \varDelta\alpha_4 \ldots \delta_0 + \varDelta\delta_4 \end{array}$$

Die noch unbekannte, meistens schon relativ sehr kleine Korrektion des Näherungswertes α_0 heiße $d\alpha$, die noch unbekannte, meistens schon relativ sehr kleine Korrektion des Näherungswertes δ_0 heiße $d\delta$, wogegen die Beträge $\varDelta\alpha_1$, $\varDelta\alpha_2$, $\varDelta\alpha_3$, $\varDelta\alpha_4$ und ebenso $\varDelta\delta_1$, $\varDelta\delta_2$, $\varDelta\delta_3$, $\varDelta\delta_4$ die oben erwähnten, genügend sicher berechenbaren Veränderungen und Verbesserungen der Näherungswerte wegen der Strahlenbrechungen usw. darstellen. Wir haben dann nach den Gleichungen für α und δ (Seite 77)

$$\begin{aligned} \alpha_0 + d\alpha + \varDelta\alpha_1 &= A_1 + \varDelta + (\xi \sin g_1^\circ - \eta \cos g_1^\circ) \operatorname{tang} \delta \ldots \\ \alpha_0 + d\alpha + \varDelta\alpha_2 &= A_2 + \varDelta + (\xi \cos g_1^\circ + \eta \sin g_1^\circ) \operatorname{tang} \delta \ldots \\ \alpha_0 + d\alpha + \varDelta\alpha_3 &= A_3 + \varDelta - (\xi \sin g_1^\circ - \eta \cos g_1^\circ) \operatorname{tang} \delta \ldots \\ \alpha_0 + d\alpha + \varDelta\alpha_4 &= A_4 + \varDelta - (\xi \cos g_1^\circ + \eta \sin g_1^\circ) \operatorname{tang} \delta \ldots \end{aligned}$$

(wo streng genommen in tang δ auch die zugehörigen Werte $\delta_0 + \varDelta\delta_1$ usw. einzutragen wären, was aber meist bei kleinen Werten von ξ und η ganz unerheblich sein wird.)

Ebenso:

$$\begin{aligned} \delta_0 + d\delta + \varDelta\delta_1 &= d_1 - (\xi \cos g_1^\circ + \eta \sin g_1^\circ) \\ \delta_0 + d\delta + \varDelta\delta_2 &= d_2 + (\xi \sin g_1^\circ - \eta \cos g_1^\circ) \\ \delta_0 + d\delta + \varDelta\delta_3 &= d_3 + (\xi \cos g_1^\circ + \eta \sin g_1^\circ) \\ \delta_0 + d\delta + \varDelta\delta_4 &= d_4 - (\xi \sin g_1^\circ - \eta \cos g_1^\circ) \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich

$$\tfrac{1}{2} [(A_3 - A_1) - (\varDelta\alpha_3 - \varDelta\alpha_1)] = (\xi \sin g_1^\circ - \eta \cos g_1^\circ) \operatorname{tang} \delta \ldots$$

und

$\frac{1}{2}[(A_4 - A_2) - (\varDelta\alpha_4 - \varDelta\alpha_2)] = (\xi \cos g_1^0 - \eta \sin g_1^0) \operatorname{tang} \delta \ldots$

ebenso:

$\frac{1}{2}[(d_1 - d_3) - (\varDelta\delta_1 - \varDelta\delta_3)] = \xi \cos g_1^0 + \eta \sin g_1^0 \ldots$

und

$\frac{1}{2}[(d_4 - d_2) - (\varDelta\delta_4 - \varDelta\delta_2)] = \xi \sin g_1^0 - \eta \cos g_1^0 \ldots$

Die linken Seiten der Gleichungen sind hier numerisch vollständig bekannt, gesucht sind ξ und η. Setzt man zur Abkürzung diese linken Seiten der Reihe nach $\varDelta A_1$, $\varDelta A_2$, $\varDelta D_1$ und $\varDelta D_2$, so erhält man leicht:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= [\,\varDelta A_2 \cos g_1^0 + \varDelta A_1 \sin g_1^0\,] \operatorname{cotg} \delta \ldots \\ \eta &= [\,\varDelta A_2 \sin g_1^0 - \varDelta A_1 \cos g_1^0\,] \operatorname{cotg} \delta \ldots \end{aligned}\right\} \varDelta A$$

ebenso:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \varDelta D_1 \cos g_1^0 + \varDelta D_2 \sin g_1^0 \ldots \\ \eta &= \varDelta D_1 \sin g_1^0 - \varDelta D_2 \cos g_1^0 \ldots \end{aligned}\right\} \varDelta D.$$

Man sieht sofort, daß die Gleichungsgruppe $\varDelta A$ im Vergleich mit der Gleichungsgruppe $\varDelta D$, gemäß den Erörterungen auf Seite 54 ff. für ξ und η um so genauere Bestimmungen liefern wird, je kleiner $\operatorname{cotg} \delta$ ist, d. h. je näher das Objekt S am Pole P liegt. In vorliegendem Falle ist dann in die Gleichungen für die zufälligen Fehler auf Seite 56 einzutragen $\cos \delta$ für $\sin \sigma_P$ und zugleich auch für $\sin s$, ferner zu setzen F_g gleich Eins und $F_s = 0$.

Die Kompensation, welche hierdurch bei den Bestimmungen nach $\varDelta D$ durch das Wegfallen des Einflusses von εU entsteht, wird bei großer Nähe von S beim Pole P reichlich dadurch aufgewogen, daß die Fehler der Kreisablesungen G bei den Bestimmungen nach $\varDelta A$ durch die Multiplikationen mit $\operatorname{cotg} \delta$ fast beliebig verkleinert werden können, während die entsprechenden Fehler der Kreisablesungen S bei den Bestimmungen von ξ und η nach $\varDelta D$ unvermindert auftreten.

Der Grad der Übereinstimmung zwischen den Werten der ξ und η, also der Äquatorial-Koordinaten des Instrumentalpoles J, nämlich $\sin \tau_i = \frac{\sin \eta}{\sin \chi}$ und $\delta_i = 90^\circ - \xi$, wie sie einesteils aus den $\varDelta A$, andernteils aus den $\varDelta D$ hervorgehen, wird jedenfalls eine wichtige Kontrolle dafür liefern, inwieweit die obige einfache Theorie des Instrumentes den Besonderheiten desselben entspricht. Aus etwaigen systematischen Verschiedenheiten der obigen Ergebnisse unterein-

ander, besonders wenn man auch noch entsprechende Beobachtungsreihen für andere etwa um 30° und um 60° veränderte Anfangswerte g_1^0 ausführt, werden die Besonderheiten des Instrumentes im Sinne der Bemerkungen auf Seite 77 zu erkennen und durch einfache Formeln, wie sie vielfach schon von der Erfahrung eingegeben und bestätigt sind, darzustellen sein.

Eine nicht unerhebliche Verbesserung kann das obige Verfahren auch dadurch gewinnen, daß man statt eines Sternes S dabei zwei, nämlich S' und S'' anwendet, deren Koordinaten dem obigen entsprechend mit $\alpha_0' + d\alpha'$, $\delta_0' + d\delta'$ und $\alpha_0'' + d\alpha''$, $\delta_0'' + d\delta''$ zu bezeichnen wären, und bei denen $\alpha_0'' + d\alpha''$ ziemlich nahe gleich $\alpha_0' + d\alpha' + 180°$ wäre, wogegen die Deklinationen, der Vereinfachung halber, nahe übereinstimmen müßten. Durch diese Disposition würde erreicht, daß die Beobachtungen bei g_1^0 und bei $g_1^0 + 180$ nicht, wie es bei einem und demselben Stern unvermeidlich ist, um nahezu 12 Stunden in U auseinander zu liegen brauchten, und dasselbe würde auch bei den Beobachtungen in $g_1^0 + 90°$ und $g_1^0 + 270°$ erreicht. Es würde nämlich der Stern S'' kurz vor oder nach dem Stern S' bei einem um 180° verschiedenen g^0 beobachtet werden. Man hätte dann die Gleichungen

$$\alpha_0' + d\alpha' + \Delta\alpha_1' = A_1' + \Delta + (\xi \sin g_1^0 - \eta \cos g_1^0) \operatorname{tang} \delta' \ldots$$
$$\alpha_0'' + d\alpha'' + \Delta\alpha_3'' = A_3'' + \Delta - (\xi \sin g_1^0 - \eta \cos g_1^0) \operatorname{tang} \delta'' \ldots$$

und

$$\alpha_0' + d\alpha' + \Delta\alpha_2' = A_2' + \Delta + (\xi \cos g_1^0 + \eta \sin g_1^0) \operatorname{tang} \delta' \ldots$$
$$\alpha_0'' + d\alpha'' + \Delta\alpha_4'' = A_4'' + \Delta - (\xi \cos g_1^0 + \eta \sin g_1^0) \operatorname{tang} \delta'' \ldots$$

sodann auch:

$$\delta_0' + d\delta' + \Delta\delta_1' = d_1' - (\xi \cos g_1^0 + \eta \sin g_1^0) \ldots$$
$$\delta_0'' + d\delta'' + \Delta\delta_3'' = d_3'' + (\xi \cos g_1^0 + \eta \sin g_1^0) \ldots$$

und

$$\delta_0' + d\delta' + \Delta\delta_2' = d_2' + (\xi \sin g_1^0 - \eta \cos g_1^0) \ldots$$
$$\delta_0'' + d\delta'' + \Delta\delta_4'' = d_4'' - (\xi \sin g_1^0 - \eta \cos g_1^0) \ldots$$

Hieraus ergibt sich zunächst, wenn wir bei der angenommenen nahen Gleichheit von δ' und δ'' jetzt $\operatorname{tang} \delta' = \operatorname{tang} \delta''$, also kurz gleich $\operatorname{tang} \delta$ setzen,

$$\tfrac{1}{2} [(A_3'' - A_1') - (\Delta\alpha_3'' - \Delta\alpha_1') - (\alpha_0'' - \alpha_0')]$$
$$= + \tfrac{1}{2} (d\alpha'' - d\alpha') + (\xi \sin g_1^0 - \eta \cos g_1^0) \operatorname{tang} \delta \ldots$$

und

$$\tfrac{1}{2}[(A''_4 - A'_2) - (\varDelta\alpha''_4 - \varDelta\alpha'_2) - (\alpha''_0 - \alpha'_0)]$$
$$= + \tfrac{1}{2}(d\alpha'' - d\alpha') + (\xi \cos g^0_1 + \eta \sin g^0_1) \operatorname{tang} \delta \ldots$$

ebenso

$$\tfrac{1}{2}[(d'_1 - d''_3) - (\varDelta\delta'_1 - \varDelta\delta''_3) - (\delta'_0 - \delta''_0)]$$
$$= + \tfrac{1}{2}(d\delta' - d\delta'') + \xi \cos g^0_1 + \eta \sin g^0_1 \ldots$$

und

$$\tfrac{1}{2}[(d''_4 - d'_2) - (\varDelta\delta''_4 - \varDelta\delta'_2) - (\delta''_0 - \delta'_0)]$$
$$= + \tfrac{1}{2}(d\delta'' - d\delta') + \xi \sin g^0_1 - \eta \cos g^0_1 \ldots$$

Die Unterschiede der angenommenen Näherungswerte der Koordinaten α'_0 und α''_0, δ'_0 und δ''_0 stehen hier als numerische Werte auf der linken Seite, während die Unterschiede ihrer noch unbekannten und durch die Messungen zu bestimmenden Korrektionen $d\alpha'' - d\alpha'$, sowie $d\delta'' - d\delta'$ auf der rechten Seite als Unbekannte enthalten sind.

Um diese unbekannten Größen aus der Bestimmung von ξ und η zu eliminieren und zugleich für ihre Beträge die erforderlichen Zusatzgleichungen zu erhalten, braucht man jetzt das obige Verfahren bloß derartig umzukehren, daß der Stern S'' bei dem obigen g^0_1 und kurz vor- oder nachher der Stern S' bei $g^0_1 + 180^0$ beobachtet wird und ebenso auch S'' bei $g^0_1 + 90^0$ und S' bei $g^0_1 + 270$. Die Gleichungen nehmen dann folgende Gestalt an:

$$\tfrac{1}{2}[(A'_3 - A''_1) - (\varDelta\alpha'_3 - \varDelta\alpha''_1) - (\alpha'_0 - \alpha''_0)]$$
$$= \tfrac{1}{2}(d\alpha' - d\alpha'') + (\xi \sin g^0_1 - \eta \cos g^0_1) \operatorname{tang} \delta \ldots$$

und

$$\tfrac{1}{2}[(A'_4 - A''_2) - (\varDelta\alpha'_4 - \varDelta\alpha''_2) - (\alpha'_0 - \alpha''_0)]$$
$$= \tfrac{1}{2}(d\alpha' - d\alpha'') + (\xi \cos g^0_1 + \eta \sin g^0_1) \operatorname{tang} \delta \ldots$$

ebenso

$$\tfrac{1}{2}[(d''_1 - d'_3) - (\varDelta\delta''_1 - \varDelta\delta'_3) - (\delta''_0 - \delta'_0)]$$
$$= \tfrac{1}{2}(d\delta'' - d\delta') + \xi \cos g^0_1 + \eta \sin g^0_1 \ldots$$

und

$$\tfrac{1}{2}[(d'_4 - d''_2) - (\varDelta\delta'_4 - \varDelta\delta''_2) - (\delta'_0\ \delta''_0)]$$
$$= \tfrac{1}{2}(d\delta' - d\delta'') + \xi \sin g^0_1 - \eta \cos g^0_1 \ldots$$

Wenn man jetzt aus den homologen Gleichungen die Mittel bildet, eliminieren sich, wie man sofort sieht, die Differenzen

$(d\alpha'' - d\alpha')$ und $(d\delta'' - d\delta')$, während aus den halben Differenzen der homologen Gleichungen die Werte von $d\alpha'' - d\alpha'$ und $d\delta'' - d\delta'$, frei von ξ und η hervorgehen.

Da es nicht leicht ist, bei der Ausführung der Beobachtungen die Differenzen um ganze Quadranten in den g^0 stets hinreichend genau einzuhalten, insofern nämlich der Zeitaufwand bei den Einstellungen und bei den Ablesungen der Kreise sich nicht leicht auf wenige Zeitminuten einhalten läßt, so empfiehlt sich schließlich auch folgendes Verfahren durch den Spielraum, den es für die Ausführung läßt, und durch die Übersichtlichkeit und Einfachheit der Rechnung. Übrigens wird der Unterschied zwischen τ und g^0 meistens, außer in sehr hohen Deklinationen, bei gehörig kleinem χ so geringfügig sein, daß man in den Argumenten der obigen und der nachfolgenden Gleichungen auch meistens τ statt g^0 wird setzen können. Wegen der hohen Deklinationen ist es aber doch richtiger, generell g^0 als Argument beizubehalten.

Man beobachte also ein Objekt S des Sternhimmels bei den folgenden 4 Werten von g^0, welche den runden Quadrantenanfängen möglichst (etwa bis auf kleine, mit ϑ zu bezeichnende Unterschiede von 2 oder 3 Graden oder ungefähr 10 Zeitminuten im Plus oder Minus) nahe kommen, so daß gefunden werde

bei	der	Uhrzeit	U_I	und	bei	$g^0 = \vartheta_I$	der	Betrag	A_I	und d_I
„	„	„	U_{II}	„	„	$g^0 = 90^0 + \vartheta_{II}$	„	„	A_{II}	„ d_{II}
„	„	„	U_{III}	„	„	$g^0 = 180^0 + \vartheta_{III}$	„	„	A_{III}	„ d_{III}
„	„	„	U_{IV}	„	„	$g^0 = 270^0 + \vartheta_{IV}$	„	„	A_{IV}	„ d_{IV}

Die zugehörigen Rektaszensionen und Deklinationen des Objekts seien in dem oben dargelegten Sinne:

$$\begin{array}{ll} \alpha_0 + d\alpha + \Delta\alpha_I & \delta_0 + d\delta + \Delta\delta_I \\ \alpha_0 + d\alpha + \Delta\alpha_{II} & \delta_0 + d\delta + \Delta\delta_{II} \\ \alpha_0 + d\alpha + \Delta\alpha_{III} & \delta_0 + d\delta + \Delta\delta_{III} \\ \alpha_0 + d\alpha + \Delta\alpha_{IV} & \delta_0 + d\delta + \Delta\delta_{IV} \end{array}$$

Man hat dann nach den bezüglichen Gleichungen, wenn man in den mit den ξ und η multiplizierten Koeffizienten die Cosinus der sämtlichen kleinen Winkel ϑ gleich Eins setzt, was bei einem Winkel ϑ von $2\frac{1}{2}^0$ nur einen Fehler von nahezu $\frac{1}{1000}$ bedingt, und wenn man die unbekannten Konstantgrößen der bezüglichen

Gleichungen, nämlich $\alpha_0 + d\alpha - \varDelta$ unter der Bezeichnung A_0, ebenso $\delta_0 + d\delta$ unter der Bezeichnung d_0, zusammenfaßt:

$$A_0 + \varDelta\alpha_I - A_I = +(\xi \sin\vartheta_I - \eta)\operatorname{tang}\delta \ldots$$
$$d_0 + \varDelta\delta_I - d_I = -\xi - \eta\sin\vartheta_I \ldots$$
$$A_0 + \varDelta\alpha_{II} - A_{II} = +(\xi + \eta\sin\vartheta_{II})\operatorname{tang}\delta \ldots$$
$$d_0 + \varDelta\delta_{II} - d_{II} = +\xi\sin\vartheta_{II} - \eta \ldots$$
$$A_0 + \varDelta\alpha_{III} - A_{III} = -(\xi\sin\vartheta_{III} - \eta)\operatorname{tang}\delta \ldots$$
$$d_0 + \varDelta\delta_{III} - d_{III} = +\xi + \eta\sin\vartheta_{III} \ldots$$
$$A_0 + \varDelta\alpha_{IV} - A_{IV} = -(\xi + \eta\sin{}_{IV})\operatorname{tang}\delta \ldots$$
$$d_0 + \varDelta\delta_{IV} - d_{IV} = -\xi\sin\vartheta_{IV} + \eta \ldots$$

Hiernach:

$$\xi = \tfrac{1}{2}[(\varDelta\alpha_{II} - \varDelta\alpha_{IV}) - (A_{II} - A_{IV})]\operatorname{cotg}\delta - \eta \times \tfrac{1}{2}(\sin\vartheta_{II} + \sin\vartheta_{IV}) \ldots$$
$$\eta = \tfrac{1}{2}[(\varDelta\alpha_{III} - \varDelta\alpha_I) - (A_{III} - A_I)]\operatorname{cotg}\delta + \xi \times \tfrac{1}{2}(\sin\vartheta_{III} + \sin\vartheta_I) \ldots$$

Wegen der Kleinheit der $\sin\vartheta$ ist ξ und η mit sehr bequemem Näherungsverfahren aus diesen beiden Gleichungen zu bestimmen. Ebenso aus den Gleichungen für d:

$$\xi = \tfrac{1}{2}[(\varDelta\delta_{III} - \varDelta\delta_I) - (d_{III} - d_I)] - \eta \times \tfrac{1}{2}(\sin\vartheta_{III} + \sin\vartheta_I) \ldots$$
$$\eta = \tfrac{1}{2}[(\varDelta\delta_{IV} - \varDelta\delta_{II}) - (d_{IV} - d_{II})] + \xi \times \tfrac{1}{2}(\sin\vartheta_{IV} + \sin\vartheta_{II}) \ldots$$

Aus allen diesen Gleichungen können schließlich sehr gesicherte Werte von ξ und η und von etwaigen kleinen Veränderungen derselben, etwa mit der Temperatur oder der Zeit, nebst den ungefähren Gesetzen dieser Veränderungen, abgeleitet werden.

Bestimmung von α und δ mit dem Äquatorial.

Trägt man danach die Werte von ξ und η in die einzelnen Gleichungen ein oder eliminiert man den Einfluß von ξ und η (eventuell in den letzten Gleichungsgruppen mit Eintragung der Zahlenwerte der ϑ) durch die Bildung der bezüglichen Mittelwerte, so findet man z. B.

$$A_0 = \tfrac{1}{2}(A_{III} + A_I) - \tfrac{1}{2}(\varDelta\alpha_{III} + \varDelta\alpha_I) + \xi \times \tfrac{1}{2}(\sin\vartheta_I - \sin\vartheta_{III})\operatorname{tang}\delta \ldots$$

und

$$d_0 = \tfrac{1}{2}(d_{III} + d_I) - \tfrac{1}{2}(\varDelta\delta_{III} + \varDelta\delta_I) + \eta \times \tfrac{1}{2}(\sin\vartheta_{III} - \sin\vartheta_I) \ldots$$

Man hat dann, da die in A_0 und in d_0 enthaltenen Näherungs-

werte α_0 und δ_0 als bekannte Zahlengrößen einzusetzen sind, für die eigentlichen Unbekannten $d\alpha$ und $d\delta$ die Relationen:

$$d\alpha = A_0 - \alpha_0 + \varDelta \qquad d\delta = d_0 - \delta_0 .$$

Der Wert $d\delta$ ist hierdurch unabhängig bestimmt.

Die Bestimmung von $d\alpha$ verlangt jetzt die Ermittelung von $\varDelta$. Diese geschieht offenbar am besten aus denjenigen Beobachtungsgleichungen für α, deren Objekt S möglichst nahe die Deklination $\delta = 0$ hat. Für ein solches Gestirn hat man einfach:

$$\alpha_0 + d\alpha + \varDelta\alpha_t = A_t + \varDelta \ldots$$

wo allgemein mit A_t das aktuelle Beobachtungsergebnis $U - G$, statt der obigen besonderen A_I, U_I, G_I usw., und wo mit $\varDelta\alpha_t$ die Verbesserung bezeichnet ist, welche an α_0 im Zeitpunkt U der Beobachtung anzubringen ist, um, wie oben, der Strahlenbrechung und den Lagenänderungen von P und E seit dem Zeitpunkt, für welchen der Näherungswert α_0 gilt (sowie einigen anderen, in den folgenden Heften zu erörternden Wirkungen der Bewegungen der Erde), Rechnung zu tragen.

Nun ist nach obiger Einführung (Seite 77)

$$\varDelta = \varDelta U - \varDelta G + \eta \operatorname{tang} \delta_z$$

also, wenn man alle beobachteten oder durch obige Beobachtungsgleichungen bereits ermittelten Werte, sowie den angenommenen Ausgangswert α_0 (zugleich mit dem jedenfalls genügend bekannten $\eta \operatorname{tang} \delta_z$) auf der rechten Seite der Gleichung zusammenfaßt:

$$d\alpha + \varDelta G - \varDelta U = A_t - (\alpha_0 + \varDelta\alpha_t) - \eta \operatorname{tang} \delta_z \ldots$$

Will man nun die unabhängige Kenntnis von $d\alpha$ erlangen, so bedarf es jetzt einer unabhängigen Ermittelung von $\varDelta G$ und von $\varDelta U$. Bevor wir hieran gehen, mögen noch einige allgemeine Bemerkungen zu den obigen Ermittelungen der Koordinaten ξ und η des Instrumentalpoles J gegen den Pol P der täglichen Drehung, sowie hinsichtlich der in den bezüglichen Gleichungen angenommenen Konstanz von $\varDelta U$ hier Platz finden.

Der Grundzug der einfachsten und direktesten obigen Bestimmungen von ξ und η besteht in den Verbindungen von je zwei Gleichungen, welche in zwei möglichst nahe um 180° voneinander verschiedenen Drehungsphasen g^0 des Instrumentes erlangt sind. Diese beiden einander entgegengesetzten Drehungsphasen, in denen

die Bewegung des Instrumentes sehr nahe zwei entsprechenden entgegengesetzten Drehungsphasen der Sternsphäre, also auch des Objektes S, um den Himmelspol P gefolgt ist, dienen dazu, die Lage dieses letzteren Poles und des seine Lage mit dem Pole J des Instrumentes verbindenden größten Kreises PJ innerhalb der den Kreisablesungen S und G entsprechenden Drehungsphasen der Visierachse um die beiden Achsen K und J ersichtlich und meßbar zu machen. Eben durch jene Beobachtungen in je zwei entgegengesetzten Phasen der Winkel g^0 (sehr nahe auch der Stundenwinkel τ) wird die Lage von P in dem instrumentalen Koordinatensystem entsprechend seinem Charakteristikum als der Pol der Drehung der Sphäre zur Geltung gebracht.

Was nun die oben vorläufig angenommene Konstanz von ΔU betrifft, so muß möglichst dafür gesorgt werden, daß dieselbe mit einer möglichst großen Annäherung durch die Vervollkommnung und sorgfältige Regulierung der zeitmessenden Einrichtungen erreicht ist, jedenfalls aber dafür, daß die unvermeidlichen kleinen Veränderungen von ΔU stetig und nach einfachen Gesetzen, womöglich proportional der Uhrzeit U selber verlaufen. Durch wiederholte unabhängige Bestimmungen von ΔU nach dem weiterhin zu erläuternden Verfahren muß man diese Kenntnis der Veränderungen von ΔU sichern. Wir werden jedoch sehen, daß man mit den unabhängigen Bestimmungen von ΔU auch für zahlreiche und wohlverteilte Sterne genügend gesicherte Bestimmungen von α erlangen kann, mit deren Hilfe man für die Dauer gewisser obiger Beobachtungsreihen sehr leicht über eine genügende Kenntnis des jeweiligen Betrages der Veränderungen von ΔU, bezogen auf einen gewissen festen mittleren oder Anfangszeitpunkt, verfügen kann. Die obigen Gleichungen würden danach leicht durch die Eintragung der bezüglichen Unterschiede der ΔU, in Gestalt der entsprechenden Unterschiede der Δ, zahlenmäßig vervollständigt werden können.

Ermittelung des Indexfehlers ΔG.

Unsere nächste Aufgabe ist jetzt, zu untersuchen, ob und eventuell auf welche Weise unabhängige Bestimmungen von ΔG erlangt werden können, und weiterhin dann an die unabhängige Bestimmung von ΔU zu gehen, durch welche nach der Gleichung $\alpha_z = U + \Delta U$ für jede Uhrzeit U die jeweilige Kenntnis der absoluten Rektaszension des Zenits, also der Sternzeit, erlangt wird, mit Hilfe deren wir dann auch absolute Rektaszensionen be-

liebiger Sterne S durch die Gleichung $\alpha = \alpha_s - \tau$ ermitteln können, sobald die Stundenwinkel τ der Sterne mit Hilfe des äquatorialen Instrumentalsystems gemessen sind. Schließlich wird zu zeigen sein, wie man mit Hilfe der Drehung der Erde selber, ohne Anwendung eines eingeteilten Kreises, nämlich lediglich mit der Zeitmessung und durch Beobachtung der Durchgangszeiten der Sonne und der Sterne durch einen und denselben Stundenwinkel, die Rektaszensionen der Sterne bestimmen kann, sobald man die Rektaszension der Sonne unabhängig ermittelt hat. Es ist ja die Sonne, durch deren scheinbare jährliche Bewegung überhaupt die Lage der Leitlinie PE am Sternhimmel charakterisiert wird.

Nach der Einführungsgleichung ist $\Delta G = 90^\circ - G_w$, und es ist G_w diejenige Ablesung des Kreises zum Pole J, bei welcher der größte Kreis JK mit der Leitlinie JW zusammenfällt. Beim Äquatorial ist diese Leitlinie JZ. Es handelt sich hier also darum, diejenige Drehungsphase von JK um J zu bestimmen, bei welcher JK und JZ zusammenfallen. Dies letztere geschieht in der Mittellage zwischen zwei zu JZ symmetrischen Drehungsphasen von JK, in denen der Pol K der zweiten Achse des Instrumentes auf entgegengesetzten Seiten von JZ gleiche Zenitdistanzen ZK hat.

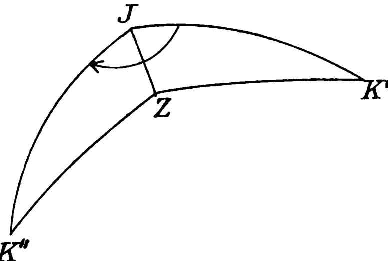


Fig. 9.

Aus Fig. 9 ersieht man, daß, wenn die Kreisablesung bei der Drehung von JK um J im Sinne der Pfeilspitze wächst, der Winkel $ZJK' = G_w - G'$ und der Winkel $ZJK'' = G'' - G_w$ ist, und man hat in den beiden sphärischen Dreiecken ZJK' und ZJK'':

$$\cos(G_w - G') = \frac{\cos ZK' - \cos JZ \cos JK'}{\sin JZ \sin JK'}$$

und

$$\cos(G'' - G_w) = \frac{\cos ZK'' - \cos JZ \cos JK''}{\sin JZ \sin JK''}$$

Trägt man hier ein

$$JK' = JK'' = 90^\circ - n$$

und setzt man in Betracht des Umstandes, daß die Zenitdistanzen ZK' und ZK'' am sichersten gemessen werden können, wenn sie

sehr nahe gleich 90° sind, $ZK' = 90° - i'$ und $ZK'' = 90° - i''$, wonach also i' und i'' die kleinen Neigungen der Achse K gegen die Niveaufläche (die Horizontebene) bedeuten, bedenkt man endlich, daß unter diesen Umständen $G_w - G'$ und $G'' - G_w$ auch nahe gleich 90° sein werden, so hat man zunächst:

$$\sin[90° - (G_w - G')] = \frac{\sin i' - \cos JZ \sin n}{\sin JZ \cos n}$$

und

$$\sin[90° - (G'' - G_w)] = \frac{\sin i'' - \cos JZ \sin n}{\sin JZ \cos n}$$

Da nach unseren Annahmen n und die beiden i als Größen erster Ordnung gelten dürfen, können wir auch die Winkel $90° - (G_w - G')$ und $90° - (G'' - G_w)$ als ebensolche Größen betrachten, denn der Divisor $\sin JZ$ darf nach dem ganzen Sachverhalt nicht als ein irgend erheblicher Vergrößerungsfaktor angesehen werden. Man hat also, wenn die beiden Seiten der Gleichungen mit $\sin 1''$ dividiert werden und $\cos n = 1$ angenommen wird:

$$90° - (G_w - G') = \frac{i' - n \cos JZ}{\sin JZ}$$

und

$$90° - (G'' - G_w) = \frac{i'' - n \cos JZ}{\sin JZ}$$

Die halbe Differenz der beiden Gleichungen gibt aber:

$$G_w = \tfrac{1}{2}[G' + G''] + \tfrac{1}{2}(i'' - i') \operatorname{cosec} JZ \ldots$$

Nun ist aber JZ, bis auf kleine Größen von der Ordnung χ, gleich PZ, also gleich $90° - \delta_z$ zu setzen, und man hat somit, da auch hier in den Koeffizienten der kleinen Größen die Koordinate δ_z stets durch Messungen anderer Art, von denen weiter unten die Rede ist, als hinreichend bekannt gelten darf, völlig berechenbar

$$G_w = \tfrac{1}{2}(G' + G'') + \tfrac{1}{2}(i'' - i') \sec \delta_z \ldots$$

Hiernach ist nunmehr $\varDelta G = 90° - G_w$ bekannt, sobald die zu den beiden nahezu symmetrischen Kreisablesungen gehörenden kleinen Winkelbeträge i' und i'' mit gehöriger Sicherheit gemessen sind.

Diese Messungen könnten mit Aufsetzung einer sogenannten Wasserwage (auch „Niveau“ oder „Libelle“ genannt) geschehen, wenn nicht gerade bei den Äquatorialinstrumenten die ganze Lage-

rung der, um die schrägliegend nach dem Pole P hin gerichtete Achse J drehbaren, Achse K es meistens sehr erschwerte, Libellen, von deren Theorie und Anwendung beim horizontalen Koordinatensystem gehandelt werden wird, auf die Achse K aufzusetzen. Es gibt aber für die Fälle, in denen man sehr vollkommen eingerichtete Äquatorialinstrumente zu unabhängigen oder absoluten Zeit- und Rektaszensionsbestimmungen benutzen will, noch andere Mittel und Wege, um den obigen Betrag $\frac{1}{2}(i'' - i')$, also nur die halbe Differenz jener beiden Neigungswinkel der Achse K gegen die Horizontalebene, hinreichend genau zu messen, u. a. dadurch, daß man diese Achse, die sogar mit konstruktivem Vorteil hohl gestaltet wird, selber als ein Fernrohr einrichtet und anwendet, indem man an dem einen Ende derselben ein Faden- oder sonstiges Mikrometernetz mit Okular und an dem andern Ende ein Linsensystem anbringt, dessen Bildfläche für parallele Strahlen mit jener Mikrometerebene zusammenfallen müßte. Die Übereinstimmung der Lage der Visierachse dieses Achsenfernrohrs mit der eigentlichen Drehungsachse oder Mittellinie des Achsenkörpers kann unschwer gesichert und kontrolliert werden, und der jeweilige Winkel dieser Visierachse mit der Lotrichtung bei nahe horizontaler Lage der Achse K kann durch Reflexionen an spiegelnden Niveauflächen (z. B. Quecksilberflächen) in Verbindung mit reflektierenden Prismen u. dergl. gut meßbar gemacht werden.

Wir wenden uns jetzt zu der Bestimmung von ΔU auf Grund der obigen Gleichung, in welcher nun der Zahlenwert von ΔG nach den vorstehenden Ermittelungen eingetragen werden kann. **Bestimmung der absoluten Rektaszension.**

Die vollständige Gleichung für α lautete allgemein nach Seite 77 und Seite 79 mit Eintragung von

$$\Delta = \Delta U - \Delta G + \eta \operatorname{tang} \delta_z$$

$$\alpha_0 + d\alpha + \Delta\alpha_t = A_t + \Delta U_t - \Delta G + \eta \operatorname{tang} \delta_z$$
$$+ (\xi \sin g^0 - \eta \cos g^0) \operatorname{tang} \delta \ldots$$

Bringen wir jetzt alle durch die obigen Ermittelungen, sowie anderweitig (wie z. B. $\Delta\alpha_t$) bekannten Größen und die Näherungswerte auf die rechte Seite, so erhalten wir für die auf der linken Seite zusammengestellten Unbekannten die Gleichung:

$$d\alpha - \Delta U_t = A_t - (\alpha_0 + \Delta\alpha_t) - \Delta G$$
$$+ \eta \operatorname{tang} \delta_z + (\xi \sin g^0 - \eta \cos g^0) \operatorname{tang} \delta \ldots$$

oder wenn wir noch für A_t die Einführungsgleichung eintragen:

$$A_t = U - G$$

$$d\alpha - \varDelta U_t = U - (\alpha_0 + \varDelta\alpha_t) - (G + \varDelta G)$$
$$+ \eta \operatorname{tang} \delta_z + (\xi \sin g^0 - \eta \cos g^0) \operatorname{tang} \delta \ldots$$

Der Index t ist bei denjenigen Größen weggelassen, bei denen entweder die Konstanz für gewisse längere Zeiträume anzunehmen ist, wie bei $d\alpha$, η, ξ, δ_z, oder bei denen es selbstverständlich ist, daß sie ohne weiteres für den Zeitpunkt und die Umstände der Beobachtung gelten, wie G, g^0 und δ (letzteres wenigstens in den Koeffizienten) oder gar diesen Zeitpunkt bezeichnen, wie U. Um nun durch die Beobachtungsergebnisse, welche auf der rechten Seite enthalten sind, die Beziehung zwischen $\varDelta U_t$ und $d\alpha$ möglichst sicher zu bestimmen, ist es im allgemeinen zweckmäßig, die Deklination des eingestellten Objektes S möglichst klein zu wählen. Sobald es sich aber dann um die Bestimmung von $d\alpha$ handelt, sind wir eben, wie vorgehend schon in Kürze erwähnt, auf dasjenige Objekt, die Sonne, angewiesen, durch welches allein die absolute Bestimmung von $d\alpha$, also der letzten und unabhängigen Korrektion des ganzen Rektaszensionssystems, nämlich der Lage der Leitlinie PE am Sternhimmel, möglich ist.

In Fig. 10 sei der zur Uhrzeit U der Beobachtung gehörige Ort der Sonne am Himmel mit $\odot$ bezeichnet. Dann heiße nach unseren bisherigen Festsetzungen die Poldistanz $P\odot = 90^0 - \delta^\odot$ und die Distanz $E\odot$ vom Pole E der Ekliptik $90^0 - \beta^\odot$, ferner ist dann entsprechend der sphärische Winkel $EP\odot$ mit $90^0 + \alpha^\odot$ zu bezeichnen. Endlich nennen wir den Abstand im Bogen größten Kreises zwischen P und E die Schiefe der Ekliptik und bezeichnen dieselbe mit ε.

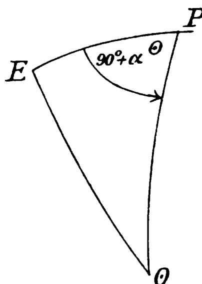


Fig. 10.

Wir haben dann die folgende Gleichung:

$$\sin \beta^\odot = \sin \delta^\odot \cdot \cos \varepsilon - \cos \delta^\odot \cdot \sin \varepsilon \sin \alpha^\odot$$

oder

$$\frac{\sin \beta^\odot}{\cos \delta^\odot \cdot \sin \varepsilon} = \operatorname{tang} \delta^\odot \cdot \operatorname{cotg} \varepsilon - \sin \alpha^\odot$$

Hier ist nun $\alpha^\odot$ die gesuchte Größe und $\delta^\odot$ ein Beobachtungsergebnis, welches wir in demselben Zeitpunkte U, zunächst mit

Hilfe des Äquatorialinstrumentes durch die Ablesungen S des Kreises K (siehe die obigen Gleichungen), erlangen können.

In der vorstehenden Gleichung zwischen $\alpha^{\odot}$ und $\delta^{\odot}$ bedarf es aber auch noch der Kenntnis von ε und von $\beta^{\odot}$. Die Schiefe der Ekliptik ε kann summarisch durch Beobachtungen von $\delta^{\odot}$ in den sogenannten Wendepunkten oder Solstizialepochen ermittelt werden. Die halbe Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Betrage von $P\odot$, welche beiden Extreme eintreten, wenn die Sonne die Leitlinie PE bei $90^{\circ} + \alpha^{\odot} = 0^{\circ}$ und bei $90^{\circ} + \alpha^{\odot} = 180^{\circ}$ passiert, ist nahezu gleich der Schiefe der Ekliptik. Also Näherungswerte von ε sind durch Deklinationsbeobachtungen der Sonne unter gehöriger Berücksichtigung der Strahlenbrechung, der Parallaxe usw. leicht zu erlangen. Genaueres wird aus den weiterhin folgenden Erörterungen erhellen.

Die Bewegung der Sonne am Himmel, als das Abbild der Bewegung der Erde um die Sonne, erfolgt aber ebensowenig genau in einem größten Kreise, wie die Bewegung der Erde genau in einer unveränderlichen Ebene geschieht.

Durch die Anziehungswirkungen der Planeten und des Mondes erleidet die Bewegung der Erde Abweichungen von der strengen Form der Bewegung in einer ebenen elliptischen Bahn um den Sonnenmittelpunkt, und diese Abweichungen werden am besten dadurch dargestellt, daß man eine mittlere Lage der Bahn als langsam und nach einfacher Formel veränderlich ansetzt, dagegen die schneller verlaufenden und kleineren Schwankungen dieser Lage als Abweichungen der Erde (und reziprok dann auch der Sonne) von jener langsam bewegten, sogenannten mittleren Ekliptik in die Darstellung der Ortsveränderungen der Sonne am Himmel einführt.

Diese schnelleren und kleineren, als Breitenabweichungen der Sonne ($\beta^{\odot}$) anzusetzenden Schwankungen der Erdbewegung werden hauptsächlich von der Anziehungskraft des Mondes und der näheren Planeten (Venus und Mars) verursacht, sind aber auf Grund der sämtlichen anderen und viel größeren Störungswirkungen, welche von denselben Ursachen ausgehen, so sicher berechenbar, daß $\beta^{\odot}$ jederzeit bis auf das Hundertstel der Sekunde als bekannt angesetzt und in die obige Gleichung zahlenmäßig eingetragen werden kann. Bevor wir uns nun aber mit der Bestimmung von $\alpha^{\odot}$ durch $\delta^{\odot}$ und durch den jeweiligen Wert der Schiefe der Ekliptik, welcher selber auch durch Beobachtungen von $\delta^{\odot}$ ermittelt wird,

beschäftigen, wollen wir zunächst noch diejenige Methode der Koordinatenbestimmung im Äquatorialsystem behandeln, welche für die Lösung dieser fundamentalen Beobachtungsaufgabe, nämlich der Bestimmung der absoluten Rektaszensionen der Gestirne mittels der Messung der Rektaszension der Sonne, die günstigsten Bedingungen darbietet.

Das natürliche Äquatorial oder das Durchgangsinstrument im Meridian.

Der Erdkörper selber ist nämlich vermöge seiner gleichförmigen Drehung um eine in ihm nahezu unveränderlich liegende Achse sozusagen ein natürliches Äquatorial, bei welchem der Pol J ohne weiteres durch den Pol P ersetzt wird, und bei welchem dann statt der Ablesungen G des zur instrumentalen Hauptachse gehörenden Kreises die Ablesungen U der Sternzeituhr eintreten, während die zweite Achse nahe rechtwinkelig zur Hauptachse, der Erdachse selber, also möglichst unveränderlich zum Erdkörper gelagert ist, und ihre Drehungen, wie bei dem gewöhnlichen Äquatorialinstrument, an den Ablesungen S eines eingeteilten Kreises gemessen werden.

Und zwar wird aus sehr naheliegenden Gründen die nahe rechtwinkelige Lage der letzteren Achse gegen die Erdachse am besten in einer zugleich sehr nahe horizontalen Lagerung der Achse K verwirklicht, einer Lage, welche die größte Stabilität und die günstigste Bestimmbarkeit ihres Winkels gegen die Richtung des Lotes und auch gegen die Richtung der Erdachse darbietet, zugleich mit der nahen Symmetrie der Lage der beiden sphärischen Örter oder Pole K ihrer Richtung zu dem Polkreise PZ. Bezeichnet man, wie bisher (siehe Fig. 11), den Winkel dieser Achse mit der Hauptachse des Instruments, also hier den Bogen PK mit $90^\circ - n$ und den Winkel ZPK mit $90^\circ - m$ (so daß hier m ebenfalls ein kleiner Winkelwert von sogenannter erster Ordnung ist), ferner wie bisher den Bogen KS mit $90^\circ + C_c$ und den Winkel KPS mit $90^\circ + Q$, ebenso den Winkel EPZ mit $90^\circ + \alpha_z = 90^\circ + U + \Delta U$, so hätte man zunächst, wenn auch wieder $EPS = 90^\circ + \alpha$ und $PS = 90^\circ - \delta$ gesetzt wird:

$$EPS = EPZ - ZPK + KPS$$

oder

$$\alpha = \alpha_z + m + Q$$

oder

$$\alpha = U + \Delta U + m + Q$$

oder, wenn für Q sein Wert nach Seite 68 eingetragen wird,

$$\alpha = U + \varDelta U + m + n \operatorname{tang} \delta + C_c \sec \delta \ldots$$

Nach den früheren Festsetzungen (Seite 35) würde sich Fig. 11 und die vorstehende Gleichung auf die Lage I dieses durch P und K charakterisierten, natürlichen Äquatorialinstrumentes zu dem Objekte S beziehen, welche wir in diesem Falle als die „Obere Kulmination“ des Objektes bezeichnen, nämlich als den vom Pol P aus auf derselben Seite, wie das Zenit Z, gelegenen Durchgang des Objekts durch den Polkreis PZ, also durch den Meridian des Beobachtungsortes, oder, etwas allgemeiner ausgedrückt, als den Beobachtungszeitpunkt, in welchem sich das Objekt in der Nähe des Meridians und auf derselben Seite von P, wie Z, befindet. Man sieht leicht, daß nach einer weiteren Drehung der Erde um nahezu 180° im Sinne der Pfeilspitze die beiden zur Erde fest orientierten Bogen größten Kreises PK und PZ sich auf der entgegengesetzten Seite zu der Lage des am Himmel und zu E fest orientierten Kreisbogens PS befindet, so daß dann S wieder in der Nähe des Meridians, aber auf der Z gegenüberliegenden Seite, in der sogenannten Unteren Kulmination beobachtet wird. Ebenso sieht man, daß dann diese Lage von K der Lage II des Instrumentes nach den früheren Festsetzungen entspricht, und daß man dann hat:

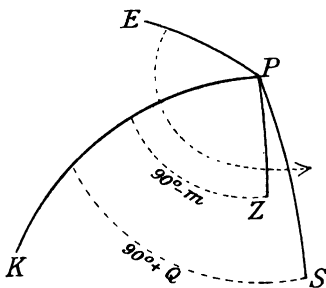


Fig. 11.

$$EPS = EPZ - ZPK - KPZ$$

oder $$\alpha = \alpha_z - 180^0 + m - Q$$

oder $$\alpha = U - 180^0 + \varDelta U + m - n \operatorname{tang} \delta - C_c \sec \delta \ldots$$

Bezeichnet man, da auch α und $\varDelta U$ zwischen diesen beiden Beobachtungszeiten eines sogenannten zirkumpolaren Objekts, die um nahe 180° oder 12 Stunden Sternzeit oder überhaupt um ein ungerades Vielfache der halben Umdrehungszeit der Erde auseinanderliegen müssen, sich verändern, mit α', U' und $\varDelta U'$ die beobachteten oder gesuchten Größen bei der ersteren Beobachtung (der „Oberen Kulmination“) und mit α'', U'', $\varDelta U''$ die entsprechenden Größen bei der anderen Beobachtung (der „Unteren Kulmination), so hat man:

$$\alpha' = U' + \varDelta U' + m + n \operatorname{tang} \delta + C_c \sec \delta \ldots \quad \text{O. K.} \ldots$$
$$\alpha'' = U'' - 180^\circ + \varDelta U'' + m - n \operatorname{tang} \delta - C \sec \delta \ldots \quad \text{U. K.} \ldots$$

und hieraus, unter der nahe erfüllbaren Voraussetzung, daß m, n und C_c in der Zwischenzeit zwischen den beiden Kulminationen sich nicht merklich geändert haben:

$$n \operatorname{tang} \delta + C_c \sec \delta = \tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha'') + \tfrac{1}{2}(U'' - 180^\circ - U') + \tfrac{1}{2}(\varDelta U'' - \varDelta U')$$

Wenn man zwischen den Beobachtungen die Lagerung der Achse K derartig ändern kann, daß, während bei der ersten Beobachtung (wie oben in Fig. 11) K im Westen, dagegen bei der zweiten Beobachtung dasselbe Ende der Achse K im Osten liegt, so ändert sich, bei voller Symmetrie und Regelmäßigkeit des Achsenkörpers, nichts in bezug auf den Abstand des Westendes der Achse vom Pole P, aber der Abstand dieses jetzigen Westendes vom Objekt ist jetzt $90^\circ - C_c$, so daß nun bei der Unteren Kulmination $Q = n \operatorname{tang} \delta - C_c \sec \delta \ldots$ Man hat dann mit Elimination von C_c:

$$n \operatorname{tang} \delta = \tfrac{1}{2}[(\alpha' - \alpha'') + (U'' - 180^\circ - U') + (\varDelta U'' - \varDelta U')] \ldots$$

Zur Bestimmung von C_c selber können aber diese „Umlegungen" der Achse K dann auch in mannigfaltiger Weise verwertet werden.

Die obige Grundformel für die Rektaszensionsbestimmungen im Meridian:

$$\alpha = U + \varDelta U + m \pm n \operatorname{tang} \delta \pm C_c \sec \delta \ldots \quad \text{O. K. \& U. K.}$$

heißt auch die Besselsche Formel.

Die Bestimmung von n aus der obigen Gleichung setzt außer der Beobachtung von $U'' - U'$ die Kenntnis der bezüglichen Veränderungen von α und $\varDelta U$ voraus. Hinsichtlich der Veränderungen von α ist zu bemerken, daß dieselben bei den Fixsternen langsam und einfach genug sind, um mit der erforderlichen Genauigkeit in den Zwischenzeiten sogar von mehrjährigen Beobachtungsreihen in Rechnung gestellt werden zu können, sobald die schwer mit genügender Schärfe bestimmbare und sehr veränderliche Wirkung der Strahlenbrechung dabei ausscheidet, wie es bei den Kulminationen der Sterne in der Rektaszension geschieht. Die Veränderungen von $\varDelta U$ können für die obige Gleichung in einfacher Weise bestimmt werden, wenn man noch eine Beobachtung in der nächsten Oberen Kulmi-

nation desselben Sternes hinzufügt, welche die Gleichung geben möge:

$$\alpha''' = U''' + \Delta U''' + m + n \operatorname{tang} \delta + C_c \sec \delta \ldots$$

Zieht man von dieser Gleichung diejenige für α' ab, so ergibt sich $\Delta U''' - \Delta U'$ in Funktion von $\alpha''' - \alpha'$ und $U''' - U'$, also nach obigem aus bekannten und beobachteten Größen bestehend. Kann man dann annehmen, daß ΔU in nicht zu langen Zwischenzeiten sich nahe proportional der Zeit ändert, so ist damit auch $\Delta U'' - \Delta U'$ bestimmt.

Rechtfertigt dagegen die Leistung der bezüglichen Pendeluhren jene Annahme nicht genügend, oder ist es nicht möglich gewesen, bei der Anordnung der Kulminationsbeobachtungen das obige einfachste Schema einzuhalten, so wird man ein größeres Material von Beobachtungen in den beiden Kulminationen zu beschaffen haben und dasselbe dann gehörig nach dem Verhalten der Uhrangaben zu der Wiederkehr der bezüglichen Drehungsphasen des Sternhimmels untersuchen müssen, wie ja überhaupt für das ganze vorliegende Beobachtungssystem die Erforschung der Gesetze der Beziehungen zwischen den Uhrangaben und den Drehungswinkeln der Sphäre den wesentlichen Punkt bildet. Dabei wird man zugleich die Frage stellen müssen, inwieweit die Größen m und n selbst zwischen aufeinanderfolgenden Kulminationen eines und desselben Sterns als hinreichend konstant anzusehen sind. Ist diese Konstanz nicht zweifellos, so werden natürlich kompliziertere Untersuchungen mit einer größeren Zahl von Kulminationspaaren verschiedener Sterne, welche den ganzen Umkreis in möglichst regelmäßiger zyklischer Verteilung umfassen, erforderlich werden, um die Veränderungsgesetze jener Größen, in Verbindung mit entsprechenden zyklischen Ermittelungen in den verschiedenen Jahreszeiten, bei verschiedenen Temperaturen der Luft, der Pfeiler des Instrumentes usw. zu ergründen. Wir sehen hier von näheren Erörterungen dieser Art ab. In der obigen Gleichung für n ist m eliminiert. Die Kenntnis von m kann aber doch für eine vollständige Verwertung der Beobachtungen nicht entbehrt werden. Um sie zu erlangen, ist eine Messung der Zenitdistanz des Achsenpoles K erforderlich. Diese kann erlangt werden entweder mit Hilfe einer Libelle, welche auf die Zapfen der Achse K aufgesetzt wird (siehe näheres über die Libellen weiter unten bei dem Horizontal-Koordinatensystem) oder durch die Be-

obachtung des Winkels, welchen die Visierachse, in der Durchgangsstellung durch den größten Kreis KZ, mit der Richtung des Einfallslotes einer spiegelnden Niveaufläche macht. Hieraus kann, wenn diese Messung des kleinen Bogens größten Kreises SZ sowohl bei der Lage von K im Westen, als bei der Lage von K im Osten vorgenommen wird, die Distanz $KS = 90^0 + C_c$ sowohl eliminiert als gleichzeitig mit KZ ermittelt werden. Setzt man KZ (ebenso wie auf Seite 88) gleich $90^0 - i$, so hat man in dem Dreieck KZP (Fig. 11)

$$\sin i = \sin n \sin \delta_z + \cos n \cdot \cos \delta_z \sin m$$

oder mit den zulässigen Abkürzungen, da man i, n, m als Größen erster Ordnung ansetzen darf und $\sec \delta_z$, ebenso wie $\operatorname{tang} \delta_z$ in den gewöhnlichen Beobachtungsumständen nicht als irgend erhebliche Vergrößerungsfaktoren zu betrachten hat:

$$m = i \sec \delta_z - n \operatorname{tang} \delta_z \ldots$$

also auch (Obere Kulmination):

$$\alpha' = U' + \varDelta U' + n(\operatorname{tang} \delta - \operatorname{tang} \delta_z) + i' \sec \delta_z + C_c \sec \delta$$
[bei K im Westen],

eine Form, welche man nach dem Astronomen Hansen benannt hat.

Entsprechend hätte man in der Unteren Kulmination:

$$\alpha'' = U'' - 180^0 + \varDelta U'' - n(\operatorname{tang} \delta_z + \operatorname{tang} \delta) + i'' \sec \delta_z - C_c \sec \delta$$
[bei K im Westen].

Endlich ist es noch von Interesse und von großem praktischen Wert, eine dritte Form der Kulminationsgleichungen aufzustellen, welche die älteste vollständige Formulierung derselben, nämlich die schon im Anfang des 18. Jahrhunderts durch Tobias Maier in Göttingen angegebene darstellt und einfach mit Hilfe der Grundgleichungen in dem vorerwähnten sphärischen Dreieck KZP gefunden wird. Dieselben lauten zunächst, wie folgt, wenn man noch den Winkel KZP mit $90^0 + k$ bezeichnet:

$$\cos n \cos m = \cos i \cos k$$
$$\cos n \sin m = \sin i \cos \delta_z + \cos i \sin \delta_z \sin k$$
$$\sin n = \sin i \sin \delta_z - \cos i \cos \delta_z \sin k$$

Mit denselben Voraussetzungen und Abkürzungen wie oben in der Gleichung für $\sin i$ hat man hieraus:

$$m = i \cos \delta_z + k \sin \delta_z \ldots$$
$$n = i \sin \delta_z - k \cos \delta_z \ldots$$

Trägt man dies in die obigen Besselschen Gleichungen für die Obere und für die Untere Kulmination ein, so hat man:

$$\alpha' = U' + \varDelta U' + k \sin(\delta_z - \delta) \sec \delta + i' \cos(\delta_z - \delta) \sec \delta + C_c \sec \delta \ldots$$
[K im Westen],

$$\alpha'' = U'' - 180^\circ + \varDelta U'' + k \sin(\delta_z + \delta) \sec \delta + i'' \cos(\delta_z + \delta) \sec \delta - C_c \sec \delta \ldots$$
[K im Westen].

Diese Form hat in der Praxis der genaueren und absoluten Bestimmungen von α den Vorzug, daß sie die maßgebende Lage der Achse K in den beiden Komponenten i und k (Neigung und Azimut der Achse) ausdrückt, nach welchen die Veränderlichkeit dieser Lage von K und der Grad der leichten und schnellen Bestimmbarkeit derselben sich am deutlichsten scheidet. Die Neigung i (das Komplement der Zenitdistanz von K) ist meistens am stärksten veränderlich, aber auch mit Hilfe der Libelle oder der Spiegelungen an Niveauflächen (Quecksilberflächen) am unmittelbarsten und sichersten jederzeit meßbar, was oben auch schon dadurch ausgedrückt ist, daß für die beiden Kulminationen verschiedene Werte von i, nämlich i' und i'', angesetzt sind. Das Azimut k ist meistens weniger veränderlich, aber auch nur mit Hilfe von mindestens einem Kulminationspaar bestimmbar, sobald die Beträge von i und C_c bekannt sind.

Durch die vorstehenden Entwicklungen ist die Bestimmung von Relationen zwischen den Rektaszensionen α und den Uhrzeiten U mit Elimination oder gleichzeitiger Bestimmung von k und mit jeweiliger Berücksichtigung der Messungsergebnisse für i und C_c hinreichend gesichert. Bei den Sternen, welche den Meridian in der Nähe von Z passieren, verschwindet auch der Einfluß von k, also auch von Veränderungen der Lagerung der Achse im Sinne des Azimutes um so vollständiger, je näher $\sin(\delta_z - \delta)$ gleich Null ist. In der Nähe des Poles P werden allerdings die sorgfältigeren Erwägungen, sowie die Berechnungsformen zur Anwendung kommen müssen, welche wir oben bei den entsprechenden Fragen innerhalb der allgemeinen Theorie des universalen sphärischen Meßinstrumentes, mit den Fixpunkten J und K, zur Erörterung gebracht haben, insbe-

sondere auch dann, wenn statt des zentralen Bildpunktes, für welchen C_c gilt, die verschiedenen Einstellungspunkte zur Anwendung kommen, für welche allgemein C gilt, das wir nicht mehr, wie C_c, als eine Größe erster Ordnung, sondern nur als eine solche kleine Größe betrachten, deren höhere Potenzen, von der dritten anfangend, vernachlässigt werden können.

Wir haben jetzt bei dem natürlichen Äquatorial in der Anwendungsform als Durchgangsinstrument im Meridian (eigentlich als Zirkummeridian - Durchgangsinstrument) noch die Bestimmung der Poldistanzen $90^\circ - \delta$ in Kürze zu betrachten. Diese Messungen reduzieren sich fast ganz auf das Schema der Messung der Poldistanzen s in dem allgemeinen sphärischen Meßinstrument mit den beiden Achsenpolen J und K.

Die Einstellung S' am Kreise K möge zur Oberen, die Einstellung S'' zur Unteren Kulmination gehören. Da die Obere Kulmination, wenn K im Westen liegt, in Betracht der Zählungsrichtung der Rektaszensionen am Pole P gegen den Leitkreis PE, nichts anderes ist als die Lage I, die Untere Kulmination ebenso nichts anderes als die Lage II, so hat man für diejenige mit S_p zu bezeichnende Drehungsphase der Visierachse um die Achse K, bei welcher die Visierachse den größten Kreis PK (die Polpunktslage) passiert, die folgenden Gleichungen:

$$90^\circ - \delta' = \pm (S' - S_p) \ldots \text{ [Obere Kulmination]},$$
$$90^\circ - \delta'' = \pm (S_p - S'') \ldots \text{ [Untere Kulmination]},$$

wo δ' den mit der Strahlenbrechung und den übrigen, sogar in der Zwischenzeit zwischen den beiden aufeinanderfolgenden Kulminationen merklichen Veränderungen behafteten Näherungswert von δ zur Zeit der O. K. und δ'' den entsprechenden Wert zur Zeit der U. K. bezeichnet.

Hieraus

$$S_p = \tfrac{1}{2}(S' + S'') \pm \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta'') \ldots$$

und

$$\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta'') = 90^\circ \mp \tfrac{1}{2}(S' - S'') \ldots$$

Das obere Zeichen in diesen Gleichungen gilt dann, wenn die Bezifferung der Kreiseinteilung bei der O. K. von der Polpunkteinstellung nach der Einstellung des Objektes hin wächst, das untere Zeichen im entgegengesetzten Falle.

Bezeichnet man $90^\circ - S_p$ mit $\varDelta S$, so hat man im ersten Falle

$$\delta'' = S'' + \varDelta S \quad \delta' = 180^\circ - (S' + \varDelta S)$$

und im zweiten Falle

$$\delta' = S' + \varDelta S \quad \delta'' = 180^\circ - (S'' + \varDelta S).$$

Eine wesentliche Erleichterung und Sicherung wird aber bei dieser Form des natürlichen Äquatorials oder Durchgangsinstrumentes durch die Möglichkeit geboten, diejenige Drehungsphase um den Pol K unmittelbar zu beobachten, bei welcher die Visierachse durch den größten Kreis KZ passiert. Dies geschieht ähnlich, wie dies vorhin in betreff der Bestimmung der Distanz ZS bei dieser Drehungsphase erwähnt wurde, durch Spiegelung der Visierachse in der Niveaufläche, z. B. eines sogenannten Quecksilberhorizontes. Nennt man die Kreisablesung bei dieser Drehungsphase S_z, so hat man einfach:

$$90^0 - \delta_z = \pm (S_z - S_p).$$

Bei dem Grade der Konstanz, welchen δ_z besitzt, kann diese Gleichung in sehr günstiger Weise als eine augenblickliche Bestimmung von S_p statt der obigen Gleichung $S_p = \frac{1}{2}(S' + S'')$ eintreten, welche immer das Zusammenwirken eines Kulminationspaares, also einen halben Tag Zwischenzeit verlangt. Man hat nämlich einfach $S_p = S_z \mp (90 - \delta_z)$, wobei das Zeichen je nach der bezüglichen Zählungsrichtung der Kreiseinteilung zu nehmen ist. Die Bestimmung von δ durch solche Beobachtungen und Kreisablesungen ist, außer durch die oben schon erwähnten instrumentalen Mängel, mit der vollen Einwirkung der Strahlenbrechung und der Parallaxe behaftet, was bei allen absoluten Bestimmungen sorgfältigst zu beachten ist.

Die Meridianbeobachtungen in Rektaszension und Deklination stellen aber doch, besonders für die ersteren bei Anwendung nicht nur der besten Zeitmessungseinrichtungen, sondern auch der besten elektrischen Registriereinrichtungen und Registriermikrometer für die Fixierung der Einstellungs- oder Durchgangsmomente, gegenwärtig noch immer das Beste dar, was man für die Bestimmung der Koordinaten der Gestirne besitzt. Wir können also jetzt zu der oben (Seite 90) bereits einleitend behandelten Bestimmung der absoluten Rektaszensionen durch die Beobachtungen der Sonne zurückkehren.

Die Bestimmung der absoluten Rektaszensionen mit dem Meridianinstrument und die Bestimmungen der Schiefe der Ekliptik.

Hat man also zu einer bestimmten Uhrzeit $U^{\odot}$ die Deklination der Sonne $\delta^{\odot}$ und gleichzeitig den Durchgang der Sonne durch die Visierachse mit dem Meridianinstrument beobachtet, so gilt die obige Gleichung (Seite 90)

$$\sin \alpha^{\odot} = \operatorname{tang} \delta^{\odot} \cdot \operatorname{cotg} \varepsilon - \frac{\sin \beta^{\odot}}{\cos \delta^{\odot} \sin \varepsilon}.$$

Für die genaue Geltung dieser Gleichung ist es nun erforderlich, daß (abgesehen von den instrumentalen Korrektionen) das beobachtete $\delta^{\odot}$ zunächst von der Wirkung der Strahlenbrechung und der Parallaxe gereinigt werde, durch welche der Ort der Sonne am Himmel gegen die derzeitige Lage der mittleren Ekliptik (siehe Seite 91), wie sie durch den Erdmittelpunkt gehend angenommen wird, herausgehoben oder herabgedrückt wird.

Von den Wirkungen, welche die Aberrationen der Lichtstrahlen durch die mit den verschiedenen Bewegungen der Erde und der Drehung der Erde verbundenen, seitlich gegen die Strahlenrichtung stattfindenden Bewegungen des Visierapparates, auch auf die Beobachtung der Deklination der Sonne ausüben, braucht man im vorliegenden Falle diese Deklination nicht zu befreien, weil die bezügliche Wirkung der Bewegung der Erde um die Sonne den Ort der Sonne am Himmel nur in der Richtung der Bewegung in der Ekliptik verschiebt, und weil die Aberrationswirkung durch die Drehung der Erde die im Meridian beobachteten Deklinationen nicht affiziert. Sodann müßte aber die Distanz zwischen dem Pol E der mittleren Ekliptik und der augenblicklichen Lage des Poles P, welche von den jeweiligen durch den Mond und die Sonne auf die Lage der Erdachse ausgeübten Anziehungswirkungen, den sogenannten Nutationen, beeinflußt wird, rechnerisch so festgestellt werden, daß man den derzeitigen Betrag ε dieser sogenannten wahren Schiefe der Ekliptik, in ähnlicher Weise, wie es oben für α und δ generell eingeführt wurde, durch folgenden Ausdruck darstellen könnte:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + d\varepsilon + \Delta\varepsilon_t,$$

wo ε_0 einen numerisch fest bestimmten Anfangs- und Näherungswert, sodann $d\varepsilon$ die unbekannte und gesuchte, längere Zeit hindurch als konstant zu betrachtende und mit Sicherheit auf Bruchteile der Sekunde einzuschränkende Korrektion desselben, endlich $\Delta\varepsilon_t$ das Aggregat aller theoretisch und rechnerisch bereits mit gehöriger

Genauigkeit, also hier bis auf das Hundertstel der Sekunde bestimmbaren Veränderungen von ε bezeichnet, von der Anfangsepoche, für welche ε_0 gilt, bis zur Beobachtungszeit $U\odot$, und zwar sowohl die innerhalb eines Jahres nahezu $0'',48$ betragenden und nahe proportional der Zeit verlaufenden Veränderungen der mittleren Schiefe der Ekliptik, als auch die vorerwähnten Nutationen in Schiefe, welche die Lage des Poles P nach E hin oder von E hinweg erfährt.

Tragen wir dies für ε in obige Gleichung ein, so hätten wir zunächst:

$$\sin \alpha\odot = \operatorname{tang} \delta\odot \operatorname{cotg} (\varepsilon_0 + d\varepsilon + \Delta\varepsilon_t) - \frac{\sin \beta\odot}{\cos \delta\odot \sin (\varepsilon_0 + d\varepsilon + \Delta\varepsilon_t)}.$$

Hier ist jetzt außer $\alpha\odot$ auch $d\varepsilon$ unbekannt und nur $\delta\odot$ durch die Beobachtung bekannt. Vereinfachen wir zunächst den Ausdruck, indem wir für das zweite Glied rechts, welches nach Seite 91 sehr klein und sehr genau rechnerisch bestimmbar ist, und in welchem also auch $d\varepsilon$ vernachlässigt werden kann, kurz setzen $f(\beta)$. Entwickeln wir dann $\operatorname{cotg} (\varepsilon_0 + d\varepsilon + \Delta\varepsilon_t)$ goniometrisch, indem wir dabei die zweiten und höheren Potenzen von $d\varepsilon \sin 1''$ gemäß den Darlegungen auf Seite 43 vernachlässigen, so erhalten wir

$$\operatorname{cotg} (\varepsilon_0 + d\varepsilon + \Delta\varepsilon_t) = \operatorname{cotg} (\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_t) - \frac{d\varepsilon \cdot \sin 1''}{\sin^2 (\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_t)} \cdots$$

und hiernach:

$$\sin \alpha\odot = \operatorname{tang} \delta\odot \operatorname{cotg} (\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_t) - d\varepsilon \cdot \sin 1'' \frac{\operatorname{tang} \delta\odot}{\sin^2 (\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_t)} - f(\beta).$$

Man ersieht aus dieser Form der Gleichung, daß jeder einzelne Wert von $\alpha\odot$ aus dem Wert von $\delta\odot$ um so unabhängiger von der zunächst unbekannten Korrektion $d\varepsilon$ ermittelt werden kann, je kleiner $\operatorname{tang} \delta\odot$ ist, also am besten in der Nähe des Frühlings- und des Herbstäquinoktiums, bei denen $\delta\odot$ gleich Null ist.

Wenn die linke Seite der Gleichung sodann nach $\alpha\odot$ und zugleich das erste Glied auf der rechten Seite, welches überhaupt bei der Kleinheit der beiden anderen Glieder wesentlich in Frage kommt, nach $\delta\odot$ differenziert wird, erhält man die Relation:

$$d\alpha\odot \cos \alpha\odot = d\delta\odot \sec^2 \delta\odot \cdot \operatorname{cotg} (\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_t) \ldots,$$

woraus der partielle Differentialquotient hervorgeht:

$$\frac{d\alpha\odot}{d\delta\odot} = \sec \alpha\odot \cdot \sec^2 \delta\odot \cdot \operatorname{cotg} (\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_t) \ldots$$

Hieraus folgt, daß Ungenauigkeiten in der Ermittelung von $\delta\odot$ den geringsten Einfluß auf die Bestimmung von $\alpha\odot$ haben, wenn $\alpha\odot$ nahe gleich 0° oder 180° ist, also ebenfalls in der Nähe eines der beiden Äquinoktien, wogegen nach den Solstizien hin, wo $\alpha\odot$ sich den Werten $\pm 90^\circ$ nähert, jenes Verhältnis durch das Anwachsen des Faktors $\sec\alpha\odot$ immer ungünstiger wird. Zugleich sieht man aber, daß, wenn $\alpha\odot = \pm 90^\circ$ wird, die obige Gleichung sich auf folgende Form reduziert, in welcher wir zur Abkürzung in den Koeffizienten der kleinen Größen $d\varepsilon$ und $f(\beta)$ hier setzen wollen ε statt $\varepsilon_0 + \varDelta\varepsilon_t$:

$$\pm \operatorname{tang}(\varepsilon_0 + \varDelta\varepsilon_t) = \operatorname{tang}\delta\odot - d\varepsilon \sin \frac{1'' \cdot \operatorname{tang}\delta\odot \operatorname{tang}\varepsilon}{\sin^2\varepsilon} - f(\beta) \operatorname{tang}\varepsilon.$$

Mit demselben Näherungsgrade können wir hier aber auch in den Koeffizienten aller kleinen Glieder innerhalb vorstehenden Ausdruckes setzen $\pm\delta\odot = \varepsilon_0 + \varDelta\varepsilon_t = \varepsilon \ldots$ und wir haben dann:

$$\pm \operatorname{tang}(\varepsilon_0 + \varDelta\varepsilon_t) = \operatorname{tang}\delta\odot \mp d\varepsilon \cdot \sin 1'' \cdot \sec^2\varepsilon - f(\beta) \operatorname{tang}\varepsilon \ldots$$

Hieraus folgt aber für das obere Zeichen, also für $\alpha\odot = +90^\circ$, wenn man hier auch

$$f(\beta) = \frac{\sin\beta}{\cos\delta\odot \sin(\varepsilon_0 + \varDelta\varepsilon_t)} \quad \text{vereinfacht in} \quad \frac{\sin\beta}{\cos\varepsilon \sin\varepsilon} \ldots$$

$$d\varepsilon \cdot \sin 1'' \sec^2\varepsilon = \sin[\delta\odot - (\varepsilon_0 + \varDelta\varepsilon_t)] \cdot \sec\delta\odot \cdot \sec(\varepsilon_0 + \varDelta\varepsilon_t) - \sin\beta \sec^2\varepsilon \ldots$$

oder wenn durch $\sin 1''$ dividiert und auch in dem Koeffizienten des ersten Gliedes rechts jetzt $\varepsilon_0 + \varDelta\varepsilon_t$ kurz mit ε bezeichnet und wegen der offenbaren Kleinheit von $\delta\odot - (\varepsilon_0 + \varDelta\varepsilon_t)$ hier $\delta\odot$ in dem Koeffizienten auch gleich ε gesetzt wird:

$$d\varepsilon = \delta\odot - (\varepsilon_0 + \varDelta\varepsilon_t) - \beta \ldots$$

Ebenso hat man für das untere Zeichen, also bei $\alpha\odot = -90^\circ$, aus obiger Gleichung:

$$d\varepsilon = -[\delta\odot + (\varepsilon_0 + \varDelta\varepsilon_t) - \beta] \ldots$$

Wenn man nun also in der Nähe der Äquinoktial-Epochen am Meridianinstrument die Uhrzeit $U\odot$ des Durchganges der Sonne (im Mittel aus den Durchgangszeiten der beiden Sonnenränder) und gleichzeitig ihre Deklination $\delta\odot$ beobachtet hat, so ergibt sich zunächst:

$$\sin \alpha^{\odot} = \operatorname{tang} \delta^{\odot} \operatorname{cotg} (\varepsilon_0 + \varDelta\varepsilon_t) - \frac{\sin \beta^{\odot}}{\cos \delta^{\odot} \sin (\varepsilon_0 + \varDelta\varepsilon_t)} \cdots$$

(mit der für die Äquinoktien oben als zulässig erkannten Vernachlässigung von $d\varepsilon$ oder nötigenfalls, wenn man einige Wochen vor oder nach einem Äquinoktium bei merklichem, wenn auch kleinem Werte von tang $\delta^{\odot}$ beobachtet hat, mit Hinzufügung des die Korrektion $d\varepsilon$ enthaltenden Gliedes, wobei man für $d\varepsilon$ das obige Ergebnis aus der Beobachtung in der Nähe von $\alpha^{\odot} = \pm 90^{\circ}$ eintragen kann).

Für den so ermittelten Wert von $\alpha^{\odot}$ hat man nun die vollständige Gleichung am Durchgangsinstrument:

$$\alpha^{\odot} = U^{\odot} + \varDelta U^{\odot} + m + n \operatorname{tang} \delta^{\odot} + C_c \sec \delta^{\odot}.$$

Können wir jetzt m, n und C_c als hinreichend bekannt annehmen, so ist $\varDelta U^{\odot}$ hier noch die einzige Unbekannte, wird also durch diese Gleichung unabhängig bestimmt. Mit Hilfe der Kenntnis des Verlaufes der Veränderungen der Uhrzeitkorrektionen $\varDelta U$, welche Kenntnis nach Seite 95 durch Beobachtung der wiederkehrenden Kulminationen der Fixsterne erlangt werden kann, vermag man jetzt die Rektaszensionen der letzteren an die oben für die Uhrzeit $U^{\odot}$ absolut bestimmte Rektaszension der Sonne anzuschließen. Man hat für irgend einen Fixstern, dessen Durchgangszeit U man nahe vor oder nach dem Sonnendurchgang an demselben Instrument beobachtet hat:

$$\alpha = U + \varDelta U + m + n \operatorname{tang} \delta + C_c \sec \delta$$

somit im Anschluß an die absolute Rektaszension der Sonne:

$$\begin{aligned} \alpha = \alpha^{\odot} + U - U^{\odot} + \varDelta U - \varDelta U^{\odot} \\ + n (\operatorname{tang} \delta - \operatorname{tang} \delta^{\odot}) + C_c (\sec \delta - \sec \delta^{\odot}). \end{aligned}$$

Hiernach kann man jetzt aus den Differenzen der Durchgangszeiten der Sonne und der Fixsterne für eine beliebige Anzahl derselben die Rektaszensionen α bestimmen und zwar um so genauer, je kleiner die Zwischenzeiten $U - U^{\odot}$, je sicherer also die Veränderungen $\varDelta U - \varDelta U^{\odot}$ der Uhrkorrektion bekannt sind, und je kleiner auch die Unterschiede der Deklinationen $\delta - \delta^{\odot}$ sind. Auf diese Weise werden jedenfalls Näherungswerte der Rektaszensionen einer gewissen Anzahl, besonders von helleren Sternen bekannt, deren Meridiandurchgänge in nicht zu langen Zeitintervallen vor oder nach dem Meridiandurchgang der Sonne am Tage beobachtet werden können.

Es ist dann weiterhin mit Hilfe des Meridiandurchgangsinstrumentes möglich, an diese Sterne, von denen man jedenfalls zwei größere Gruppen, die eine um die Zeit des Frühlingsäquinoktiums, die andere (gegenüberliegende) um die Zeit des Herbstäquinoktiums auf obige Weise mit der Rektaszension der Sonne verbinden kann, eine größere Anzahl anderer Sterne mit systematischen Durchgangsbeobachtungen so anzuschließen, daß man danach im ganzen Umkreise und in den verschiedenen Parallelkreisen ein in sich wohlausgeglichenes System von Sternrektaszensionen kennen wird, an welche man nun wieder reziprok Rektaszensionsbestimmungen der Sonne über den ganzen Umkreis der Ekliptik hin mit Hilfe von Durchgangsbeobachtungen der Sonne und von Durchgangsbeobachtungen der Sterne anschließen kann, wozu dann noch die Deklinationsbeobachtungen der Sonne vervollständigend hinzutreten.

Die Sternbeobachtungen an und für sich liefern nur Rektaszensionsdifferenzen, deren Ausgleichung man aber durch sorgfältigste Untersuchung der Uhrgänge und der Instrumentalfehler zu einer gewissen Vollkommenheit bringen kann, so daß die umfassendere Vergleichung von Sterndurchgängen mit den etwas weniger genauen, nämlich wesentlich durch die Wärmewirkungen der Sonne ungünstiger beeinflußten, Durchgangsbeobachtungen der Sonne dann überwiegend der möglichst genauen Bestimmung der nur mit Hilfe der Sonne ausführbaren letzten Reduktion der sämtlichen Sternrektaszensionen auf die sogenannte absolute Rektaszension und zugleich der genaueren Untersuchung der ganzen Bewegung der Sonne am Himmel, also der Theorie der Erdbewegung, zu dienen hat. Wir dürfen in diesem Sinne annehmen, daß es sich darum handelt, die letzte Korrektion eines ganzen Systems von Sternrektaszensionen oder, was dasselbe ist, die letzte und lange Zeit hindurch als konstant zu betrachtende Verbesserung x der sämtlichen Uhrkorrektionen zu ermitteln, welche aus der Beobachtung von Durchgangszeiten der Sterne auf Grund eines bestimmten Rektaszensionssystems desselben gefunden wurden.

Hat man also für eine Durchgangszeit der Sonne, nämlich $U^{\odot}$, aus benachbarten Durchgangszeiten U von Sternen die Rektaszension der Sonne $\alpha_s^{\odot}$ gefunden durch Gleichungen von der Form

$$\alpha_s^{\odot} - \alpha = U^{\odot} - U + \Delta U^{\odot} - \Delta U + n\,(\operatorname{tang}\delta^{\odot} - \operatorname{tang}\delta) + C_c\,(\sec\delta^{\odot} - \sec\delta),$$

so bedeutet dieses $\alpha_s^{\odot}$ die dem Rektaszensionssystem der Sterne

angeschlossene Sonnenrektaszension, während die noch nicht in aller Strenge bekannte, aber aus den Deklinationen der Sonne selbständig abzuleitende Sonnenrektaszension $\alpha^{\odot}$ heiße. Unbekannt ist also noch die letzte Korrektion x, welche an die Werte $\alpha^{\odot}_{s}$ anzubringen ist, um mit $\alpha^{\odot}$ übereinzustimmen und dann nach der Gleichung für α durch $\alpha^{\odot}$ auf Seite 103 auch das ganze Rektaszensionssystem der Sterne noch in größtmöglicher Strenge auf die genaue Lage der Leitlinie *PE* zu beziehen und damit sozusagen absolut zu bestimmen.

Wir haben also zur Ermittelung von x jetzt wieder nach der obigen Gleichungsform:

$$\sin \alpha^{\odot} = \sin(\alpha^{\odot}_{s} + x) = \operatorname{tang} \delta^{\odot} \operatorname{cotg}(\varepsilon_0 + d\varepsilon + \varepsilon_t) - f(\beta)$$

wo $\delta^{\odot}$ wieder der zur Uhrzeit $U^{\odot}$ beobachtete und von Strahlenbrechung und Parallaxe befreite Wert der Sonnendeklination ist.

Die Aufgabe ist nun, x und $d\varepsilon$ durch zahlreiche, über den ganzen Umkreis der Ekliptik verteilte Durchgangsbeobachtungen und Deklinationsbeobachtungen der Sonne, sowie durch zahlreiche Durchgangsbeobachtungen von Sternen, welche in Verbindung mit den Sonnenbeobachtungen zunächst die Werte $\alpha^{\odot}_{s}$ liefern, zu ermitteln.

Hierzu wird es eine besondere Erleichterung bieten, daß uns immer schon ein System von Näherungswerten von $\alpha^{\odot}$, $\delta^{\odot}$ und ε, sowie $\beta^{\odot}$, aus vorangegangenen Untersuchungen zur Verfügung steht, welche in sogenannten Sonnentafeln verkörpert sind. Die aus diesen Tafeln abgeleiteten Ephemeriden geben uns diese Werte, die wir mit dem Index r als Rechnungsergebnisse aus den besten früheren Beobachtungen bezeichnen wollen, in solchem formalem Zusammenhange, daß in aller Strenge die Gleichungen erfüllt sind:

$$\sin \alpha^{\odot}_{r} = \operatorname{tang} \delta^{\odot}_{r} \operatorname{cotg} \varepsilon_r - \frac{\sin \beta^{\odot}_{r}}{\cos \delta^{\odot}_{r} \sin \varepsilon_r}.$$

Richten wir es nun so ein, daß der Näherungswert $\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_t$ in den vorangegangenen Gleichungen mit dem Rechnungswerte ε_r genau übereinstimmt, so hätten wir für jene Gleichungen jetzt:

$$\sin(\alpha^{\odot}_{s} + x) = \operatorname{tang} \delta^{\odot} \operatorname{cotg}(\varepsilon_r + d\varepsilon) - \frac{\sin \beta^{\odot}}{\cos \delta^{\odot} \sin \varepsilon_r}.$$

Setzen wir endlich $\beta^{\odot} = \beta^{\odot}_{r}$ und vernachlässigen wir in den Koeffizienten von $\sin \beta^{\odot}$ den Unterschied zwischen $\delta^{\odot}$ und $\delta^{\odot}_{r}$, so

finden wir für den Unterschied der beiden Gleichungen den folgenden Ausdruck:

$$\sin(\alpha_s^\odot + x) - \sin\alpha_r^\odot = \operatorname{tang}\delta^\odot \operatorname{cotg}(\varepsilon_r + d\varepsilon) - \operatorname{tang}\delta_r^\odot \operatorname{cotg}\varepsilon_r \ldots$$

Da wir annehmen dürfen, daß $\alpha_s^\odot - \alpha_r^\odot$, x, $\delta^\odot - \delta_r^\odot$, $d\varepsilon$ sämtlich sehr kleine Winkelgrößen sind, so können wir in dieser Gleichung die Unterschiede der Funktionen und auch ihrer Produkte nach der Taylorschen Reihe so entwickeln, daß wir überall die Glieder weglassen, welche die zweiten und höheren Potenzen und die Produkte jener Größen enthalten; dann haben wir:

$$\cos\alpha_r^\odot(\alpha_s^\odot - \alpha_r^\odot + x) = \sec^2\delta_r^\odot \operatorname{cotg}\varepsilon_r(\delta^\odot - \delta_r^\odot) - \operatorname{tang}\delta_r^\odot \operatorname{cosec}^2\varepsilon_r \times d\varepsilon \ldots$$

oder, wenn wir die Unbekannten x und $d\varepsilon$ auf dieselbe Seite bringen:

$$x \cdot \cos\alpha_r^\odot + d\varepsilon \cdot \operatorname{tang}\delta_r^\odot \operatorname{cosec}^2\varepsilon_r = (\delta^\odot - \delta_r^\odot)\sec^2\delta_r^\odot \operatorname{cotg}\varepsilon_r - (\alpha_s^\odot - \alpha_r^\odot)\cos\alpha_r^\odot.$$

Der Verlauf der Bestimmungen von x und $d\varepsilon$ nach obiger Gleichung tritt am deutlichsten hervor, wenn wir ihre Form, unter Berücksichtigung der Gleichung $\pm\delta_r^\odot = \varepsilon_r$ für $\alpha_r^\odot = \pm 90^0$ (siehe auch Seite 102), für die Anfänge der Quadranten von $\alpha_r^\odot$ angeben:

Für $\alpha_r^\odot = 0^0$ hat man $x = (\delta^\odot - \delta_r^\odot)\operatorname{cotg}\varepsilon_r - (\alpha_s^\odot - \alpha_r^\odot)\ldots$
„ $\alpha_r^\odot = 180^0$ „ „ $x = -(\delta^\odot - \delta_r^\odot)\operatorname{cotg}\varepsilon_r - (\alpha_s^\odot - \alpha_r^\odot)\ldots$
„ $\alpha_r^\odot = 90^0$ „ „ $d\varepsilon = (\delta^\odot - \delta_r^\odot)\ldots$, da hier $\delta_r^\odot$ nahe $= \varepsilon_r$
„ $\alpha_r^\odot = 270^0$ „ „ $d\varepsilon = -(\delta^\odot - \delta_r^\odot)\ldots$, „ „ $-\delta_r^\odot$ „ $= \varepsilon$

Man ersieht hieraus auch, daß an je zwei einander gegenüberliegenden Stellen des Umkreises der Einfluß von Fehlern, die der Beobachtung von $\delta^\odot$ anhaften können, sowohl für die Bestimmung von x, als für diejenige von $d\varepsilon$, mit entgegengesetzten Zeichen auftritt, so daß im Mittel aus zwei, um einen halben Sonnenumlauf auseinander liegenden Bestimmungen von x und auch von $d\varepsilon$ alle systematischen, auf die beiden Beobachtungen von $\delta^\odot$ konstant wirkenden Fehler, welche die am schwersten zu beseitigenden sind, unwirksam gemacht werden. Wir haben damit nur dasselbe Prinzip zu konstatieren und zur Anwendung zu bringen, welches oben in dem sogenannten Einstellungspaar und entsprechend auch in der

Verbindung der um einen halben täglichen Umlauf auseinander liegenden beiden Kulminationen Verwertung gefunden hat.

Zu der für die allgemeine Anwendung der vorstehenden Gleichung geeignetsten Form, mit Eintragung der Relation

$$\operatorname{tang} \delta_r^{\odot} = \operatorname{tang} \varepsilon_r \sin \alpha_r^{\odot} \ldots$$

nämlich:

$$x \cos \alpha_r^{\odot} + 2\, d\varepsilon \sin \alpha_r^{\odot} \operatorname{cosec} 2\, \varepsilon_r = (\delta^{\odot} - \delta_r^{\odot}) \sec^2 \delta_r^{\odot} \operatorname{cotg} \varepsilon_r - (\alpha_s^{\odot} - \alpha_r^{\odot}) \cos \alpha_r^{\odot}$$

ist noch zu bemerken, daß zahlreiche Beobachtungsgleichungen von dieser Form, welche für zahlreiche verschiedene und möglichst gleichmäßig verteilte Werte von $\alpha_r^{\odot}$ die Werte $\alpha_s^{\odot} + x = \alpha^{\odot}$ ergeben, nach der Theorie der kleinsten Summen von übrigbleibenden Fehlerquadraten zu berechnen sind und dann auch zur Prüfung und fortschreitenden Verbesserung der Theorie der Erdbewegung dienen, während zugleich durch die Bestimmungen von x und $d\varepsilon$ auch die Lagenänderungen von P und E am Sternhimmel und die Ortsbestimmungen der Sterne immer vollständiger und sicherer ermittelt werden.

Das Universaldurchgangsinstrument.

Die zuletzt von uns erörterte Art der Koordinatenmessung im System $P\&E$, nämlich durch das natürliche Äquatorial oder Meridiandurchgangsinstrument, kann nun noch eine Vervollständigung und Erweiterung durch eine weitere Ausbildung des Durchgangsprinzips erfahren, wenn man nämlich der Achse K, unter Festhaltung einer nahezu horizontalen Lagerung, verschiedene Azimute gibt und dann ebenfalls die Uhrzeiten von Durchgängen durch die Richtung der stets nahe rechtwinklig zur Achse K gestellten Visierachse beobachtet. Wenn man dann mit Hilfe einer rechtwinklig zur Achse K angebrachten sogenannten Querlibelle imstande ist, auch bei verschiedenen Azimuten von K eine und dieselbe Drehungsphase der Visierachse um die Achse K, bezogen auf die feste Durchgangsphase der Visierachse durch den größten Kreis KZ, also, mit anderen Worten, einen und denselben Winkel ZKS festzuhalten, so ist man imstande, auch für die Bestimmung der Deklinationen nur noch der Messung der Drehungswinkel der Erde und des Meridians PZ durch die Uhrzeiten zu bedürfen und von den Kreisablesungen S und

ihren Mängeln für die absoluten oder fundamentalen Bestimmungen der Koordinaten im System $P\&E$, nämlich der α und δ, ganz frei zu werden. Hier soll auf nähere Darlegungen dieser Erweiterungen der Anwendung des Durchgangsprinzips in Gestalt eines solchen Universaldurchgangsinstrumentes verzichtet werden, da dieselben meinerseits bereits eine Veröffentlichung als Nr. 5 der „Astronomischen Abhandlungen als Ergänzungshefte zu den „Astronomischen Nachrichten“, herausgegeben von Prof. Dr. H. Kreutz, gefunden haben unter dem Titel: Beiträge zur Ausgleichung der fundamentalen Ortsbestimmungen am Himmel.

Alle diese Beobachtungen werden nicht bloß der Bestimmung der Örter und Ortsveränderungen der Gestirne und der Lagenänderungen der Ekliptik und der Erdachse im Raume, sondern zugleich den feinsten Untersuchungen der Zeitmessungseinrichtungen und schließlich auch der kritischen Theorie der Drehung des Erdkörpers zu dienen haben.

Das Koordinatensystem des Lotes oder der Niveaufläche (Horizontalsystem).

Wir gehen jetzt über zu den Messungen im Koordinatensystem des Lotes oder der Niveaufläche, kurz bezeichnet als das Horizontalsystem. Diese Messungen erfolgen in aller Vollständigkeit mit Hilfe des universalen Horizontalinstrumentes, welches meistens in besonderem Sinne „Universalinstrument“ schlechtweg genannt wird. Dieser Benennung wollen wir uns jedoch aus naheliegenden formalen Gründen nicht anschließen, da dieselbe durchaus nicht das entscheidend Charakteristische für dieses Instrument ausdrückt. Nach der Analogie des Namens „Äquatorialinstrument“ wollen wir hier den Namen „Horizontalinstrument“ gebrauchen.

Der Polpunkt der Hauptachse dieses Instrumentalsystems, welcher auch hier, der allgemeinen obigen Festsetzung für die sphärischen Universalinstrumente entsprechend, mit J bezeichnet werde, soll mit dem Polpunkt des Horizontes, dem Zenit Z, möglichst nahe zusammenfallen, und der Leitpunkt des horizontalen Instrumentalsystems soll mit dem Leitpunkt des entsprechenden natürlichen Koordinatensystems, nämlich dem Polpunkt P der täglichen Drehung der Sphäre (siehe Seite 26) identisch sein (siehe nebenstehende Figur 12).

Die Koordinaten im instrumentalen System mögen auch hier die schematischen Bezeichnungen beibehalten:

$$PJS = g,$$

gezählt von der Leitlinie JP in der Richtung der Pfeilspitze (also im Sinne der Uhrzeigerbewegung), ferner

$$JS = s.$$

Entsprechend hätte man im Horizontalsystem selber

$$PZS = \gamma$$

ebenso gezählt wie g

$$ZS = \sigma.$$

Im übrigen gelten die Festsetzungen und Bezeichnungen von Seite 31—33 für die sogenannten Instrumentalfehler n und C_c.

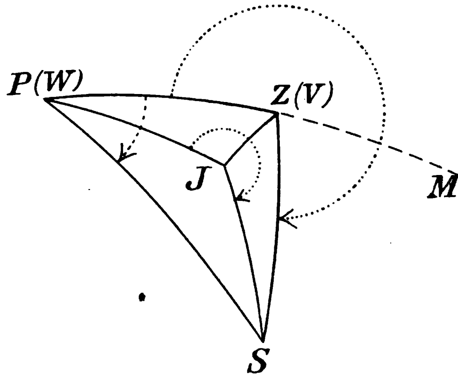


Fig. 12.

Man nennt nun nach konventioneller Zählungsweise, bei welcher die Verlängerung der Leitlinie PZ über Z hinaus, nach der sogenannten Mittagsseite, also ZM in der Figur, die Anfangsrichtung bildete, den Winkel MZS das Azimut des Objektes S, und man bezeichnet diesen Winkel kurz mit a, so daß $\gamma = 180^\circ + a$. Für σ hat man den selbstverständlichen Namen Zenitdistanz, und man bezeichnet dieselbe gewöhnlich kurz mit z.

Wir wollen jedoch bei der Erörterung der Beziehungen zwischen den Koordinaten im instrumentalen und den Koordinaten im natürlichen Horizontalsystem die Bezeichnungen γ für das um 180° vermehrte oder verminderte Azimut und σ für die Zenitdistanz einstweilen beibehalten.

Es sei ferner, wie bei der allgemeinen Darlegung des Problems (Seite 64) $JZ = \chi$, sodann $PZJ = \gamma_i$ (in derselben Richtung von ZP aus gezählt, wie $PZS = \gamma$) und ferner $PJZ = g_v - 180^\circ$ (ebenso gezählt). Es mögen dann die Kreisablesungen wieder ebenso wie bei den oben zitierten Festsetzungen angenommen und bezeichnet werden, nämlich G die Ablesungen am Kreise zur Achse J, dem Horizontalkreise, und S die Ablesungen am Kreise zur Achse K, nämlich dem Vertikalkreise, bedeuten.

Endlich ist, wie früher, $90^0 - G_w = \varDelta G$ gesetzt. Man hat dann:

$$\text{in Lage I} \quad g^0 = G' + \varDelta G + Q - \chi \sin g_v \operatorname{tang} \delta_z \ldots$$
$$\text{in Lage II} \quad g^0 = G'' - 180^0 + \varDelta G - Q - \chi \sin g_v \operatorname{tang} \delta_z \ldots$$

wo
$$Q = n \operatorname{cotg} s + C_c \operatorname{cosec} \cdot s \ldots$$

ferner
$$\text{in Lage I} \quad s = \pm (S' - S_i) \ldots$$
$$\text{in Lage II} \quad s = \pm (S_i - S'') \ldots$$

und sodann nach Seite 66—68

$$\gamma = g^0 + \chi \sin (g_v - g) \operatorname{cotg} \sigma \ldots$$
$$\sigma = s + \chi \cos (g_v - g) \ldots$$

Die Verwertung des Einstellungspaares in den beiden Lagen zur Bestimmung oder Eliminierung von Q und zur Bestimmung von S_i [nämlich gleich $\frac{1}{2}(S' + S'')$ für ein Objekt S, dessen Koordinaten im instrumentalen System zwischen den Beobachtungen, in den beiden Lagen, unveränderlich sind] ist hier etwas leichter und günstiger, als es im äquatorialen Instrumentalsystem der Fall war, insbesondere weil hier in der Nähe des Horizontes, also in der Poldistanz $JS = 90^0$ feste Objekte von geeigneter Beschaffenheit im ganzen Umkreise leichter zu finden sind. Es wird sich nun zunächst um die Bestimmung und Berücksichtigung von χ und von g_v handeln.

Bestimmung der Transformationselemente zwischen dem instrumentalen und dem natürlichen Horizontalsystem.

Da man im vorliegenden System die Richtung zum Polpunkt Z unmittelbar optisch einstellen kann, und zwar Hilfe der schon oben erwähnten Reflexionsbeobachtung der Nadirrichtung an einer spiegelnden Niveaufläche, so ist es möglich, hier unter der leicht zu erfüllenden Voraussetzung, daß die Winkelgrößen χ, ebenso wie n und C_c Größen erster Ordnung sind (man wird sie beim Horizontalinstrument gerade mit Hilfe von Reflexionsbeobachtungen und Libellen sehr leicht auf wenige Sekunden einschränken können), innerhalb des Gesichtsfeldes des Fernrohrs und mit den mikrometrischen Einrichtungen desselben die Lage von Z und zwar nach kürzestem Abstand von dem größten Kreis KJ und nach der Lage der Projektion von Z auf KJ gegen J zu messen. Unmittelbar wird man etwa mit Fäden, welche durch Mikrometerschrauben beweglich sind, mit Hilfe derjenigen Drehungsphase der Visierachse, welche oben mit S_i bezeichnet ist, sowohl in der Richtung KJ, als rechtwinklig dazu (also in der Richtung der sogenannten Horizontalfäden und der sogenannten Vertikalfäden)

die Komponente des Abstandes zwischen dem Mikrometermittelpunkte und derjenigen Stelle des Gesichtsfeldes messen, in welcher das Reflexionsbild von der Niveaufläche mit der bezüglichen Stellung der beweglichen Mikrometerfäden selber zusammenfällt. Der Übergang aber von dem Orte des Mikrometermittelpunktes S_i auf die Lage von J im Gesichtsfelde ergibt sich alsdann einfach durch den in der Richtung des größten Kreises KJ (oder der Horizontalfäden) stattfindenden Abstand $JS_i = n + C_c$. Man kommt auf diese Weise zur Kenntnis der beiden Komponenten von χ, aus denen man χ selber findet und dann mit Hilfe der zu der Messungsstelle zugehörigen Ablesung G den Übergang auf g_v machen kann. Das ganze Verfahren verlangt aber die vollkommeneren Einrichtungen größerer Fernröhre und ist in der Ausführung ziemlich umständlich.

Ein anderes, bei den größeren und vollkommeneren Horizontalinstrumenten anzuwendendes Verfahren ist mit Hilfe der oben (Seite 107) schon erwähnten Querlibelle auszuführen, nämlich die Einstellung gleicher Winkel ZKS, also gleicher Drehungsphasen der Visierachse um die Achse K gegen diejenige Anfangsphase, in welcher der größte Kreis KS mit KZ zusammenfällt. Bezeichnet man (siehe Fig. 13 auf Seite 112) den Winkel ZKS kurz mit V, gezählt von KZ aus in der Richtung entgegengesetzt der Uhrzeigerbewegung, wenn man sich von K aus herabblickend denkt, so ist man sicher, daß V unverändert einen und denselben Wert hat, wenn die Querlibelle, welche mit der Achse K in irgend einer Drehungsphase fest verbunden werden kann, dann unverändert eine und dieselbe Angabe macht, z. B. auf Null einsteht.

Wenn man nun aber die Achse K durch den ganzen Umkreis um die Achse J bewegt, ohne die Drehungsphase um K selber irgendwie zu ändern, so wird zwar der Winkel JKS, den man mit V_i bezeichnen kann und (den man von derjenigen Drehungsphase aus zählt, bei welcher die Richtung der Visierachse den größten Kreis KJ passiert und die Kreisablesung S_i stattfindet), ganz unverändert bleiben, dafür aber der Winkel V gesetzmäßige Veränderungen erfahren, die man an der Veränderung der Ablesung der Libelle erkennen kann, und die von der Lage von J gegen Z abhängig sind, somit zur Ermittlung der letzteren dienen können. In der Fig. 13 sind zwei einander entgegengesetzte Drehungsphasen der Horizontalachse K um die Vertikalachse J dargestellt, sowie die zugehörigen Winkel V und V_i, welche der größte Kreis KS in irgend einer,

durch die Ablesungen der Querlibelle zu kontrollierenden Drehungsphase der Visierachse um die Achse K mit dem größten Kreise KZ, beziehungsweise welche er zugleich mit dem größten Kreise KJ bildet.

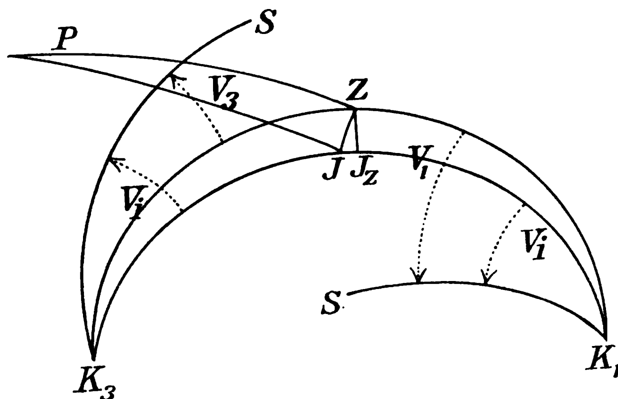


Fig. 13.

Man sieht leicht, daß in den beiden entgegengesetzten Drehungsphasen von JK um J, nämlich in den beiden Stellungen JK_1 und JK_3 bei unveränderter Drehungsphase von KS um K, der Winkel V_i (nämlich JK_1S und JK_3S) derselbe geblieben ist, aber der Winkel ZK_1S (gleich V_1) in den kleineren Winkel ZK_3S (gleich V_3) übergegangen ist. Und zwar ist $V_1 - V_i = JK_1Z$ und $V_i - V_3 = JK_3Z$.

Man hat aber in den sphärischen Dreiecken K_1JZ und K_3JZ:

$$\sin JK_1Z = \frac{\sin JZ \cdot \sin K_1JZ}{\sin K_1Z} \quad \text{und} \quad \sin JK_3Z = \frac{\sin JZ \cdot \sin K_3JZ}{\sin K_3Z}$$

Nach den vorangegangenen Ausführungen ist aber innerhalb jener Dreiecke

$$K_1JZ = PJK_1 - PJZ$$

und

$$K_3JZ = PJK_3 + PJZ,$$

wo PJZ nach dem früheren gleich $g_v - 180^0$ ist, und wo man analog PJK_1 mit g_{k_1} und PJK_3 mit $360^0 - g_{k_3}$ bezeichnen kann so daß:

$$K_1JZ = 180^0 - (g_v - g_{k_1}) \quad K_3JZ = 180^0 - (g_{k_3} - g_v).$$

Zugleich ist $K_1JZ = 180^0 - K_3JZ$ und (bis auf Glieder von der Ordnung χ) $K_3Z = K_1Z$.

Hiernach ist zunächst:

$$\sin JK_1Z = \frac{\sin\chi\,\sin(g_v - g_{k_1})}{\sin K_1Z} = \sin JK_3Z = \frac{\sin\chi\,\sin(g_{k_3} - g_v)}{\sin K_3Z}$$

also auch in zulässiger Abkürzung:

$$JK_1Z = JK_3Z$$

oder auch $$V_1 - V_i = V_i - V_3 = \tfrac{1}{2}[V_1 - V_3].$$

Zur näheren Bestimmung von K_1Z und K_3Z fällt man jetzt das sphärische Perpendikel von Z auf den größten Kreis K_1J, welches denselben in dem Punkte J_z treffen möge. Man hat dann nach allen obigen Voraussetzungen für JJ_z (positiv von J aus nach der jeweiligen Lage von K hin gezählt) den Ausdruck

$$-\chi\cos(g_v - g_{k_1}) \text{ und auch } -\chi\cos(g_{k_3} - g_v)$$

und
$$K_1J_z = K_1J - JJ_z = 90^0 - n + \chi\cos(g_v - g_{k_1})$$
$$K_3J_z = K_3J - JJ_z = 90^0 - n + \chi\cos(g_{k_3} - g_v).$$

Nun ist aber

$$\operatorname{tang} K_1Z = \operatorname{tang} K_1J_z \cdot \sec JK_1Z$$

und $$\operatorname{tang} K_3Z = \operatorname{tang} K_3J_z \cdot \sec JK_3Z.$$

Da aber JK_1Z und JK_3Z von der Ordnung von χ sind, hat man mit den bekannten Abkürzungen:

$$K_1Z = K_1J_z \ldots \text{ und } K_3Z = K_3J_z \ldots$$

somit $$\sin K_1Z = \sin K_1J_z \ldots = \cos[n - \chi\cos(g_v - g_{k_1})] \ldots$$
$$\sin K_3Z = \sin K_3J_z \ldots = \cos[n - \chi\cos(g_{k_3} - g_v)] \ldots$$

folglich mit derselben Vernachlässigung der Glieder von der Ordnung der zweiten und höheren Potenzen und der Produkte von n und χ

$$\sin K_1Z = 1 \ldots \quad \sin K_3Z = 1 \ldots$$

und damit

$$\tfrac{1}{2}(V_1 - V_3) = \chi\sin(g_v - g_{k_1}) = \chi\sin(g_{k_3} - g_v) \ldots$$

Es ist aber, wie man leicht sieht, da nach der Figur die Lage von K_1 und S, ebenso wie diejenige von K_3 und S, bei der oben schon festgesetzten Zählungsrichtung der Winkelkoordinaten g am

Pole J hier der Lage I angehört, $g'_k = g_1 - (90^0 + Q)$ und $g_{k_3} = g_3 - (90^0 + Q)$, also $g_v - g_{k_1} = g_v - g_1 + 90^0 + Q$ und $g_{k_3} - g_v = g_3 - g_v - (90^0 + Q)$. In den mit χ multiplizierten Ausdrücken darf man jedoch Q vernachlässigen, da Q ohne erhebliche Vergrößerungsfaktoren, die in dem Ausdrucke für Q durch n, C_c und s nur in der nächsten Umgebung des Poles J auftreten, auch von der ersten Ordnung ist. Man kann dies hier um so sicherer, als bei diesem Instrumentalsystem nicht bloß, wie oben schon bemerkt, χ innerhalb der Grenzen von wenigen Sekunden gehalten, sondern überhaupt bei allen Koordinatenmessungen die Nähe des Poles J leicht gänzlich vermieden werden kann. Die Objekte S, welche dem Zenit nahe kommen, verweilen ja bei der Drehung der Sphäre auch nur ganz kurze Zeit in der Nähe von J, wogegen bei dem Äquatorialsystem gewisse Gruppen von Objekten jahrzehntelang den Polen P und J sehr nahe bleiben können und alsdann die besonderen Unterscheidungen und sorgfältigeren rechnerischen Behandlungen verlangen, die oben auf Seite 44ff. erörtert worden sind.

Man kann hier also vereinfachend setzen:

$$g_v - g_{k_1} = 90^0 + (g_v - g_1) \text{ und } g_{k_3} - g_v = -(90^0 + g_v - g_3).$$

Hiernach hat man:

$$\tfrac{1}{2}(V_1 - V_3) = \chi \cos(g_v - g_1) = -\chi \cos(g_v - g_3) \ldots,$$

wobei zur Kontrolle zu bemerken ist, daß g_1 in der Tat von g_3, bei Vernachlässigung von Q, um nahe 180^0 verschieden ist.

Ganz ebenso würde man bei einem Wertpaar g_2 und g_4, welches von g_1 und g_3 um rund 90^0 vorwärts gewählt wird, finden:

$$\tfrac{1}{2}(V_2 - V_4) = \chi \cos(g_v - g_2) = -\chi \cos(g_v - g_4) \ldots$$

Setzt man $\chi \cos g_v = x_v$ $\chi \sin g_v = y_v$, so hat man beispielsweise:

$$\tfrac{1}{2}(V_1 - V_3) = x_v \cos g_1 + y_v \sin g_1 \ldots$$
$$\tfrac{1}{2}(V_2 - V_4) = x_v \cos g_2 + y_v \sin g_2 \ldots$$

oder, wenn man schließlich einträgt $g_2 = g_1 + 90^0 \ldots$,

$$\tfrac{1}{2}(V_2 - V_4) = -x_v \sin g_1 + y_v \cos g_1 \ldots$$

und hieraus:

$$x_v = \tfrac{1}{2}[(V_1 - V_3)\cos g_1 - (V_2 - V_4)\sin g_1] \ldots$$
$$y_v = \tfrac{1}{2}[(V_1 - V_3)\sin g_1 + (V_2 - V_4)\cos g_1] \ldots$$

$$\operatorname{tang} g_v = \frac{y_v}{x_v} \quad \chi = x_v \sec g_v = y_v \operatorname{cosec} g_v.$$

Diese Unterschiede der V in den verschiedenen Quadranten, von g_1 bei Lage I ($= G_1 + \Delta G$) anfangend, werden aber einfach an der Querlibelle und zwar an der Stellung der Mitte ihrer sogenannten „Luftblase" in der Einteilung der oberen Fläche der Glasröhre abgelesen, wobei die positive Richtung der Ablesung entgegengesetzt der positiven Richtung der Zählung von V genommen wird, nämlich von K aus auf die Libelle blickend nach rechts hin.

Der Winkelwert eines Libellenintervalles kann aber hier einfach mittels der Mikrometereinstellungen für ein Objekt von fester Zenitdistanz ermittelt werden, oder auch bloß mittels der Kreisablesungen S, indem man die Drehungsphase der mit der Querlibelle in einer geeigneten Ablesungsstellung durch Klemmung zu verbindenden Horizontalachse K um bestimmte am Mikrometer oder am Kreise abzulesende Winkelgrößen ΔV verändert und die dadurch verursachten Änderungen der Blasenstellung an der Libelle abliest.

Näheres zur Theorie und Anwendung der Libelle.

Hat man keine solche mit der Horizontalachse zu verbindende Querlibelle, so kann eine andere Art der Libelleneinrichtung zur direkten Bestimmung der Lage der Vertikalachse J gegen die Lotrichtung, nach den beiden Komponenten x_v und y_v, dienen, nämlich eine Libelle, welche mit der Vertikalachse derartig fest verbunden werden kann, daß z. B. bei einer Anfangsphase g_1 in Lage I der Drehung des Instrumentes um diese Achse die Blase sich nahezu in der Mitte der Ablesungsskale einstellt. Es ist für die Anwendung dieser Ablesungen und für die Geltung der obigen Formeln zweckmäßig, daß die Hauptkrümmungsebene dieser Libelle auch rechtwinklig zur Horizontalachse ist, also übereinstimmend mit der Lage einer Querlibelle. Die Erfüllung dieser Bedingung wird hinreichend dadurch kontrolliert, daß man vor Beginn der Benutzung einige Male die Neigung der Horizontalachse durch die betreffenden Einrichtungen hebt und wieder senkt, wobei dann die Blase der Libelle keine merkliche Ortsveränderung zeigen darf. Sei nun die Anfangsablesung der Libelle (wieder positiv nach rechts gezählt, wenn man von K aus darauf hinblickt) in der Drehungsphase g_1 der Vertikalachse (bei Festhaltung der Lage I) λ_1, sodann bei den Drehungsphasen $g_1 + 90^\circ$, $g_1 + 180^\circ$, $g_1 + 270^\circ$ der Reihe nach mit λ_2, λ_3, λ_4, so hat man, entsprechend den obigen Gleichungen für die Querlibelle:

$$\tfrac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_3) = \chi \cos(g_v - g_1) \ldots$$
$$\tfrac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_4) = \chi \cos(g_v - g_2) \ldots$$

usw. bis zu den ganz entsprechenden Gleichungen für x_v und y_v (Seite 114), in denen man nur die obigen λ einzutragen hat.

Diese letztere Einrichtung bildet nun auch den Übergang zu einer vollständigeren Verwertung der Libellen. Man kann nämlich auch durch Verbindung einer Libelle mit der Lagerung der Horizontalachse K in den verschiedensten Drehungsphasen dieser Achse, sowie in den verschiedensten Drehungsphasen g der Vertikalachse die oben eingeführten Komponenten JJ_z ermitteln, schließlich aber auch durch Umsetzung der Libelle auf den Zapfen der Horizontalachse die jeweilige Zenitdistanz von K ($= 90^0 - i$) direkt bestimmen, von welchem Messungsergebnis wir oben bereits bei den Maierschen Formeln des Meridianinstrumentes Gebrauch gemacht haben. Und aus solchen Messungen ergeben sich nicht nur die Komponenten von χ, sondern auch Bestimmungen von n.

Wir müssen aber hierzu eine kurze Darlegung des Wesens und der sphärischen Theorie der Libelle einfügen. Eine Libelle ist also ein zylindrisches Glasgefäß, dessen innere Wandungen durch Ausschleifen an den maßgebenden Stellen eine Flächengestaltung erhalten haben, die man nahezu durch die Rotation eines Kreisbogens von sehr großem Radius um eine Achse darstellen kann, welche parallel der Sehne des Bogens ist und sich in einem Abstande von einigen Millimetern (bei den kleineren Libellen) bis zu wenigen Zentimetern (bei den größeren Libellen) von der Sehne befindet, also ein an den bezüglichen Stellen der inneren Wandungen tonnenähnliches Gebilde, welches für den bloßen Anblick nahezu einer geraden kreisförmigen Zylinderröhre gleicht. Diese Röhre ist mit einer leicht verdampfenden, nach sonstigen Eigenschaften für die intakte Erhaltung der inneren Flächengestaltung und auch im Punkte der Kapillaritätswirkungen möglichst günstigen Flüssigkeit (Spiritus, Äther) angefüllt bis auf einen kleinen Raumteil, welcher sich dadurch ergibt, daß die Flüssigkeit in erwärmtem Zustande in die Röhre eingefüllt und daß alsdann bei vollständiger Füllung die Röhre vollkommen dicht geschlossen wird, so daß dann bei der gewöhnlichen Temperatur die auf einen kleineren Raumgehalt sich zusammenziehende Flüssigkeit eine „Blase“ freiläßt, die sich mit ihrem Verdampfungsprodukt erfüllt. Bei der einfachsten Gestalt einer Libelle, der Kugellibelle, nämlich einer auch in obiger Weise zu füllenden gläsernen Hohlkugel, hat die Blase die Gestalt einer Kugelkappe, und der Scheitel dieser Kugelkappe sucht stets diejenige,

nämlich die höchste, Stelle der Kugelfläche einzunehmen, an welcher die letztere von dem nach dem Zenit gerichteten Kugelradius getroffen wird. Dieser Mittelpunkt der Blase ist so in gewissem Sinne der sphärische Ort der Lotrichtung. Segmente von solchen Kugellibellen werden bekanntlich in Gestalt von sogenannten Dosenlibellen dazu benutzt, um Ebenen, die durch drei Fußpunkte der Fassung gehen oder mit der ebenen äußeren Bodenfläche der Dosenlibelle zusammenfallen, parallel der Niveaufläche einzustellen, wobei der zugehörige Scheitelpunkt des Kugelsegments, mit welchem dann die Mitte der Blase zusammenfallen muß, auf der Kugelfläche markiert ist.

Die zylindrische Tonnenlibelle ist gewissermaßen eine spezielle Deformation der Kugellibelle. Sie hat in zwei zueinander rechtwinkligen Richtungen Krümmungsradien von verschiedener Länge und Krümmungsmittelpunkte von verschiedener Lage. In denjenigen Krümmungsebenen, welche rechtwinklig zu den Ebenen der Querschnitte der Röhre liegen, ist der Krümmungsradius sehr groß, dagegen in den Krümmungsebenen, welche, mit Querschnitten zusammenfallend, rechtwinklig zu der Achse sind, dem Radius der nahe kreisförmigen Querschnitte der Röhre entsprechend. Die Blase hat demgemäß bei einer solchen Röhrenlibelle nicht die Gestalt einer Kugelkappe, sondern eine länglichrunde Gestalt, deren längste Erstreckung parallel zu der Achse der Röhre ist. Durch die Kapillaritätswirkungen wird der Unterschied zwischen der Längen- und der Breitendimension der Blase derartig gemildert, daß diese bei einer Einschränkung auf einen sehr kleinen Raumgehalt wieder nahezu kreisförmig begrenzt, aber auch bei größeren Dimensionen an den Enden kreisförmig gerundet ist. Der Ort ihrer Mitte läßt sich in der Einteilung, die parallel der Achse auf der Glasfläche der Röhre angebracht wird, durch die Ablesung der jeweiligen Lage der beiden etwas abgerundeten Blasenenden als Mittelwert aus diesen beiden Ablesungen bestimmen. Entsprechend dem oben in betreff der Kugellibelle gesagten, sucht die Blasenmitte in der Einteilung, in deren Richtung die Blase sich parallel der Röhrenachse bewegt, auch stets den höchsten Punkt der inneren gekrümmten Fläche einzunehmen, nämlich denjenigen Punkt, in welchem die durch den Mittelpunkt des bezüglichen Kreisbogens gelegte Lotrichtung die Einteilung trifft. Auch in der Richtung der die Querschnitte der Röhre begrenzenden Kreisbogen von kleinem Radius sucht die

Blasenmitte stets den höchsten Punkt einzunehmen. Wegen der in dieser Richtung sehr kleinen Länge des Krümmungsradius verursachen aber Winkelbewegungen oder Neigungsänderungen der Libelle in dieser Richtung nur ganz minimale Ortsveränderungen der Blase, parallel den Teilstrichen, da für eine Neigungsänderung um einen Grad die betreffende Ortsveränderung der Blase $\frac{1}{57}$ der Länge des Krümmungsradius beträgt, also bei einer Länge desselben von 10 Millimetern erst in der Nähe der gewöhnlichen Wahrnehmbarkeitsgrenze ist. Dagegen erfährt der Ort der Blasenmitte in der Richtung der Achse, also der Einteilung, gemäß den in dieser Richtung stattfindenden sehr flachen Krümmungen und entsprechend großen Krümmungsradien schon bei sehr kleinen, in dieser Richtung stattfindenden Neigungsänderungen sehr große Veränderungen. Bei einer Libelle, bei welcher die Blasenmitte ihre Lage in der Einteilung um 1 Millimeter ändert, sobald die Neigung der Achse der Libelle gegen die Lotrichtung eine Änderung von einer Sekunde erfährt, beträgt die Länge des Krümmungsradius 206,... Meter. Natürlich können Krümmungen solcher Art nur durch feinste Handarbeit mit unablässig begleitender Beobachtung und Messung hergestellt werden, wie denn überhaupt das ganze Wesen der inneren Flächengestaltung einer solchen Libelle an denjenigen Flächenstücken, an denen sich die Blase bei den Ablesungen entlang bewegt und einstellt, durch die Vergleichung mit einer Tonnenfläche nur ganz näherungsweise dargestellt wird. Das ganze Flächengebilde ist theoretisch kaum ganz erschöpfend zu behandeln, zumal bei stark veränderlichen Dimensionen der Blase, wie sie durch Temperaturänderungen bedingt werden, während andererseits die Erhaltung einer bestimmten Blasenlänge, mit Hilfe der sogenannten Reservoirs, auch nicht ganz ohne Bedenken, im Punkte der Konstanz der Krümmungsverhältnisse, ist. Es bedarf daher sehr sorgfältiger erfahrungsmäßiger Prüfungen der Beziehungen zwischen den Ortsveränderungen der Blase und den Lagenänderungen der Libellen gegen die Lotrichtung und zwar bei verschiedenen Dimensionen der Blase. Diese Prüfungen geschehen mit besonderen Mikrometerapparaten und auch mit Hilfe eingeteilter Kreise, und ihre Resultate ermöglichen es dann, die Libellen bei ihrer Anwendung als einfache Kreisbogen von sehr großem Radius, also sehr beträchtlicher Lineargröße der zu sehr kleinen Winkelgrößen gehörenden Bogen, sozusagen differential anzuwenden, wobei alle hier in Frage

kommenden kleinen Neigungen der Lotrichtung rechtwinklig zur Ebene des Kreisbogens vernachlässigt werden können.

Die Libellenablesungen als Einstellungspaar.

Die oben schon näher behandelte, mit der Vertikalachse verbundene Libelle kann hiernach als ein solcher Kreisbogen mit linearer Einteilung betrachtet werden, in welcher die Blasenmitte stets den Zenitpunkt angibt, nämlich den Punkt, in welchem die Libelleneinteilung von dem der Projektion der Lotrichtung auf die Ebene des Kreisbogens parallelen Radius des letzteren getroffen wird. An der Hand dieser ganz im Sinne der Sphärik vereinfachten Auffassung können jetzt zwei Ablesungen der Libelle in zwei einander entgegengesetzten Drehungsphasen der Vertikalachse ganz so behandelt werden, wie oben (Seite 35) ein sogenanntes Einstellungspaar der Visierachse auf ein festes Objekt, wodurch man die Drehungsphase S_i der Achse K und den Bogenabstand zwischen der Kreisablesung für die Polpunktseinstellung S_i und der Kreisablesung S für das Objekt ableitet.

Dem festen Objekt entspricht hier im Raume und in dem instrumentalen Koordinatensystem die Lotrichtung und zwar die Projektion derselben auf die Ebene des Kreisbogens der Libelle, dargestellt durch die Lage der Blasenmitte in der Einteilung der Libelle. Nach unserer obigen ersten Darlegung über die Anbringung der Libelle an der Vertikalachse soll die Hauptkrümmungsebene oder, kurz gesagt, die Libellenebene rechtwinklig zur Achse K, also parallel der Ebene des Vertikalkreises sein, an welchem bei dem vorerwähnten Einstellungspaar des festen Objektes die Ablesungen S erfolgen. Wir haben also nur noch über die Zählungsrichtung auf dem Libellenkreisbogen Bestimmung zu treffen, um jene Formeln analog anwenden zu können. Ganz entsprechend den vorangegangenen Annahmen möge in der Libellenskale die positive Richtung nach rechts, für den vom Pole K auf die Libelle blickenden, angenommen werden, und es werde nun in der Drehungsphase g_1 der Vertikalachse bei der Lage I des Instrumentes, also wenn g'_k nahezu gleich $g_1 - 90^0\ldots$ ist, der Ort der Blasenmitte in der Libellenskale, wie oben (Seite 115), beobachtet gleich λ_1. Sodann werde um die Vertikalachse gedreht bis $g_1 + 180^0$ (Lage I) also $g'''_k = g_1 - 90^0 + 180^0$ und nun der Ort der Blasenmitte in der Libellenskale bei λ_3 gefunden, dann ist $\lambda_i = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_3)$ sozusagen der instrumentale Polpunkt in dem Kreisbogen der Libelle (entsprechend dem früher bestimmten instrumentalen Polpunkt S_i der Kreisablesungen S) und

es ist ferner $\lambda_1 - \lambda_i$ oder $\lambda_i - \lambda_3$ oder $\frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_3)$ der Winkelabstand zwischen dem instrumentalen Polpunkt der Libelleneinteilung und der Projektion des Zenitpunktes auf die Ebene dieser Einteilung (wobei die Querschnittebenen der Striche der Einteilung als hinreichend nahe rechtwinklig zu der Einteilungsebene angenommen werden dürfen). Der Abstand $\lambda_1 - \lambda_i$ entspricht also an der Sphäre dem Abstande ZJ_z (siehe Fig. 13) oder der Länge des sphärischen Perpendikels von Z auf JK_1, welche Länge bei der Kleinheit von χ als äquivalent mit dem Abstande zwischen J und der Projektion von Z auf einen durch J rechtwinklig zu JK_1 gelegten größten Kreisbogen angenommen werden darf. Es ist aber nach den obigen Darlegungen (Seite 112 und Fig. 13)

$$ZJ_z = \chi \sin K_1JZ$$

und
$$K_1JZ = 180^0 - (g_v - g_{k_1}) \ldots$$

also
$$ZJ_z = \chi \sin(g_v - g_{k_1})$$

oder mit Eintragung von $g_{k_1} = g_1 - (90^0 + Q) \ldots$ in Lage I und Weglassung von Q

$$\lambda_1 - \lambda_i = ZJ_z = \chi \cos(g_v - g_1) \ldots$$

In der entgegengesetzten Phase der Drehung der Vertikalachse und der mit ihr verbundenen Libelle, also bei

$$g_{k_3} = g_1 + 180^0 - (90^0 + Q) = g_1 + 90^0 \ldots$$

hat man nach Fig. 13

$$ZJ_z = \chi \sin K_3JZ$$

und
$$K_3JZ = g_{k_3} - g_v$$

also
$$ZJ_z = \chi \sin(g_{k_3} - g_v)$$

somit
$$\lambda_i - \lambda_3 = \chi \cos(g_v - g_1).$$

Die Verwertung der entsprechenden Beobachtung von λ_2 und λ_4 zu einer Kontrollbestimmung von $\lambda_i = \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_4)$, verbindet sich dann nach dem obigen Schema mit λ_1 und λ_3 (Seite 114 und Seite 115) auch zu der Bestimmung von χ und g_v.

Bestimmung der Zenitdistanz mit Hilfe der Libelle.

Allgemein hätte man dann aus der Ablesung einer nach den vorstehenden Angaben angebrachten und abgelesenen Libelle, deren Ablesung bei Lage I allgemein, ohne unteren Index, bezeichnet werden möge mit λ' und bei Lage II mit λ'' und zwar stets vom Pole K aus blickend nach rechts positiv, während g allgemein die

betreffende Koordinate des in den beiden Lagen eingestellten Objektes ist, nach Seite 110 für die Bestimmung der Zenitdistanzen σ:

$$\sigma = s + \chi \cos (g_v - g)$$

also in Lage I $\quad \sigma = \pm (S' - S_i) + \lambda' - \lambda_i$

und in Lage II $\quad \sigma = \pm (S_i - S'') + \lambda_i - \lambda''$.

Ebenso, wie dann das Mittel aus den beiden Bestimmungen von σ zur Elimination von S_i dient, wird auch λ_i aus diesem Mittel eliminiert.

Bei den Kreisablesungen hängt die Wahl des Zeichens von der Zählungsrichtung in der Kreiseinteilung ab, für welche kein bestimmter Usus besteht; bei der Zählung in dem Libellenkreisbogen gelten die obigen Festsetzungen. Das obere Zeichen bei den Kreisablesungen gilt, wenn in Lage I bei einem in der Richtung der Uhrzeigerbewegung, von K aus gesehen, erfolgenden Übergang vom Pole J nach dem Objekte hin die Kreisablesung wächst.

Man kann nun auch schreiben, wenn man, einem auch oben beim Äquatorialsystem vorausgesetzten Brauche folgend, S_i zu einem möglichst kleinen Winkelausdruck macht und $-S_i = \varDelta S$ setzt:

in Lage I $\quad \sigma = \pm [S' + \varDelta S \pm (\lambda' - \lambda_i)] \ldots$

in Lage II $\quad \sigma = \mp [S'' + \varDelta S \pm (\lambda'' - \lambda_i)] \ldots$

Darf man die Konstanz von $\varDelta S$ und von λ_i, nämlich die Konstanz der Kreisablesungseinrichtungen, sowie der Werte χ und g_v und auch der Verbindung der Libelle mit der Vertikalachse J während einer Beobachtungsreihe, in welcher die Objekte in beiden Lagen beobachtet werden, mit hinreichender Sicherheit annehmen, so kann man auch S_i oder $\varDelta S$ mit λ_i verbinden und z. B., wenn man zugleich berücksichtigt, daß auch ein und dasselbe Himmelsobjekt seine Zenitdistanz σ in der Zwischenzeit zwischen den Beobachtungen in den beiden Lagen ändert, schreiben:

Lage I $\quad \sigma' = \pm (S' \pm \lambda') \mp (S_i \pm \lambda_i)$

Lage II $\quad \sigma'' = \mp (S'' \pm \lambda'') \pm (S_i \pm \lambda_i)$.

Bei gewissen Einrichtungen von Horizontalinstrumenten, insbesondere den kleineren, wird die nahe rechtwinklig zur Horizontalachse K angebrachte, nach obiger Annahme mit der Vertikalachse zu verbindende Libelle nicht **unmittelbar** mit letzterer Achse in Verbindung gebracht, sondern zunächst mit denjenigen Mikroskopen-

oder Nonien-Trägern, welche zur Ablesung des Vertikalkreises dienen und selber zu der Vertikalachse und zur Ebene des Vertikalkreises möglichst unveränderliche, und auch von dessen Drehung um die Achse K möglichst unabhängige, Lage haben müssen. In den meisten Fällen werden dann die Mikroskopträger oder die Nonienkreise auf die Horizontalachse selber mit kreisförmigen Ringen lose aufgesteckt und dann an der Mitbewegung mit der Drehung dieser Achse durch feste Anschläge mit federnden Gegenwirkungen und Einstellungsschrauben möglichst gehindert. In diesen Fällen dient unsere Libelle zugleich als Sicherheitslibelle gegen kleine Mitbewegungen der Mikroskopenträger usw. mit der Drehung der Horizontalachse, und die Anwendung der Libelle besteht dann darin, daß man sie mit Hilfe kleiner Drehungsbewegungen, welche man ihr gemeinsam mit dem Mikroskopenträger usw. um die Horizontalachse erteilt, stets so einzustellen sucht, daß die Blasenmitte unmittelbar vor jeder Ablesung S des Vertikalkreises möglichst genau an einer und derselben Stelle der Libellenskale einspielt. Da jede Winkelbewegung der Blasenmitte an dem Kreisbogen der Libelle mit der gleichzeitigen sehr kleinen Winkelbewegung der Mikroskopeinstellung in der Kreisablesung auf Grund der vorerwähnten gemeinsamen Drehungseinrichtung um die Achse K übereinstimmen muß, so wäre der Verlauf der Zenitdistanzmessung in den beiden Lagen jetzt etwa der folgende. Nach der Anfangseinstellung eines Objekts in der einen Lage, bei welcher man am Kreise S' und an der Libelle λ' abgelesen habe, macht man die Einstellung des Objektes in der andern Lage und findet die Kreisablesung S'' und die Libellenablesung λ''.

Wenn man jetzt durch die erwähnte Einstellschraube Mikroskopträger und Libelle um die Achse K so dreht, daß die Blasenmitte der Libelle wieder bei der vorangegangenen Ablesung λ' einspielt, so hat sich gleichzeitig die Kreisablesung S'' um $\pm(\lambda' - \lambda'')$ geändert.

Die Unterscheidung zwischen den beiden Zeichen wird nach den vorangegangenen Festsetzungen und angesichts der Kreisablesung nicht zweifelhaft sein. Man hat dann unmittelbar in der jetzt veränderten Ablesung $S'' \pm (\lambda' - \lambda'')$ die richtige von dem Einflusse der fehlerhaften Lage von J zu Z, sowie von etwaigen kleinen Mitbewegungen der Mikroskope mit der Drehung der Horizontalachse befreite Ablesung und man hat also je nach der Zählungsrichtung der Kreisablesung:

Lage I

$\sigma' = S' + \varDelta S$ oder $= 360^\circ - (S' + \varDelta S)$

Lage II

$\sigma'' = 360^\circ - [S'' \pm (\lambda' - \lambda'') + \varDelta S]$ oder $= S'' \pm (\lambda' - \lambda'') + \varDelta S.$

Diese Anwendungsart der Libelle wird dann am besten so geordnet, daß man die Blasenmitte durch gemeinsame Drehung der Libelle mit dem Mikroskopenträger um die Achse K vor jeder Kreisablesung S stets nahezu an einer und derselben Stelle ihrer Skale zum Einspielen bringt und kleine Unvollkommenheiten dieser Einstellung schließlich noch rechnerisch als kleine numerische Verbesserungen der Kreisablesung anbringt; also wenn z. B. die Libelle zum vollen Einspielen an einer und derselben Stelle (etwa der Nullstellung) noch eine letzte kleine Winkelbewegung von einer Sekunde brauchte, dies nicht mit der Einstellschraube vollendet, sondern zu der Kreisablesung in derjenigen Richtung hinzurechnet, in welcher die bezügliche Libellenbewegung noch die Kreisablesung verändert haben würde.

Bestimmung des Azimutes mit Hilfe der Libelle.

Wir haben jetzt die Bestimmungen der Koordinaten γ, welche die Azimute liefern, sowie die hierbei wesentlichen Anwendungen einer sogenannten Achsenlibelle, welche auf die Achse K aufgesetzt wird, zu erörtern. Da diese Achse auch mit der Vertikalachse J in fester Verbindung ist und um diese bewegt wird, so ist eigentlich die Achsenlibelle, deren Kreisbogenebene parallel mit der Achse K ist, mutatis mutandis, im Prinzip nichts anderes als die vorher beschriebene Libelle, welche rechtwinklig zur Achse K mit der Vertikalachse verbunden wird. Der Ort der Blasenmitte in der Kreisbogeneinteilung der Achsenlibelle ist der sphärische Ort desjenigen Radius dieses Kreisbogens, welcher parallel zu der Projektion der Lotrichtung auf die Ebene des größten Kreises KJ ist, in welcher letzteren der Kreisbogen der Libelleneinteilung nach allen obigen Darlegungen als eingestellt gelten darf, sobald mäßige Drehungen der Libelle um die Mittellinie der die Libelle tragenden Drehzapfen der Achse K zwar kleine Bewegungen der Blasenmitte parallel den Teilstrichen der Skale, aber keine Ortsveränderungen der Blase in der Richtung der Skale hervorbringen.

Wenn dann hier hypothetisch der sphärische Ort desjenigen Radius des Libellenkreisbogens, welcher parallel der Vertikalachse J ist, in der Einteilung der Skale mit l_i und der jeweilige Ort der

Blasenmitte durch die Ablesung l bezeichnet wird und zwar positiv gezählt nach dem sogenannten Kreisende K der Horizontalachse hin, so sieht man leicht mit Hilfe der Fig. 13 und der sonstigen Darlegungen auf Seite 112 ff., daß bei derjenigen Drehungsphase der Achse J, welche wir oben mit g_{k_1} bezeichnet haben, und bei welcher wir jetzt entsprechend die Ablesung der Blasenmitte mit l_1 bezeichnen wollen:

$$l_1 - l_i = - \chi \cos (g_v - g_{k_1}) \ldots$$

Ebenso hätten wir in der entgegengesetzten Drehungsphase der Achse J, welche oben mit g_{k_3} bezeichnet wurde:

$$l_i - l_3 = + \chi \cos (g_{k_3} - g_v) \ldots$$

Ganz entsprechend würden wir ein zweites Einstellungspaar, nahezu rechtwinklig zu dem vorstehenden, haben:

$$l_2 - l_i = - \chi \cos (g_v - g_{k_2}) \ldots$$

und

$$l_i - l_4 = + \chi \cos (g_{k_4} - g_v) \ldots$$

Jetzt können wir, wie auf Seite 114, zur Verbindung der einzelnen g_k unter Festhaltung der Lage I der Visierachse einführen:

$$g_v - g_{k_1} = 90^0 + g_v - g_1 \qquad g_{k_3} - g_v = -(90^0 + g_v - g_3)$$
$$g_v - g_{k_2} = 90^0 + g_v - g_2 \qquad g_{k_4} - g_v = -(90^0 + g_v - g_4)$$

also wenn:

$$g_2 = g_1 + 90^0, \; g_3 = g_1 + 180^0, \; g_4 = g_1 + 270^0$$
$$l_1 - l_i = \chi \sin (g_v - g_1) \qquad l_i - l_3 = - \chi \sin (g_v - g_3) = \chi \sin (g_v - g_1)$$
$$l_i - l_2 = \chi \sin (g_v - g_2) \qquad l_i - l_4 = - \chi \sin (g_v - g_4) = \chi \sin (g_v - g_2)$$

Hiernach analog, wie oben bei der rechtwinklig zur Achse K angebrachten Libelle,

$$\tfrac{1}{2}(l_1 - l_3) = \chi \sin (g_v - g_1) \text{ und } \tfrac{1}{2}(l_2 - l_4) = \chi \sin (g_v - g_2).$$

Durch diese Gleichungen aber, mit der Relation $g_2 = g_1 + 90^0$ wird x_v und y_v analog wie oben auf Seite 114 bestimmt

$$\tfrac{1}{2}(l_1 - l_3) = y_v \cos g_1 - x_v \sin g_1$$
$$\tfrac{1}{2}(l_2 - l_4) = - y_v \sin g_1 - x_v \cos g_1.$$

Nachdem hieraus schließlich auch mit Anwendung der Achsenlibelle Werte von χ und g_v ermittelt sind, und nachdem entsprechend der Besonderheit der Einrichtung und der Leistungsfähigkeit der beiden Libellen, zugleich nach den Prinzipien der Fehlertheorie, aus

allen diesen Bestimmungen definitivere Werte von χ und g_v, wenigstens bei vollkommeneren Instrumenten von größerer Beständigkeit, gefunden worden sind, hat man mit Eintragung der bezüglichen Werte nunmehr nach Seite 110:

Lage I

$$\gamma = G' + \Delta G - \chi \sin g_v \operatorname{tang} \delta_z + n \operatorname{cotg} s + C_c \operatorname{cosec} s + \chi \sin (g_v - g) \operatorname{cotg} \sigma \ldots$$

Lage II

$$\gamma = G'' - 180^\circ + \Delta G - \chi \sin g_v \operatorname{tang} \delta_z - n \operatorname{cotg} s - C_c \operatorname{cosec} s + \chi \sin (g_v - g) \operatorname{cotg} \sigma \ldots$$

Hier kann man nun in Betracht der obigen Erörterungen über die Kleinheit von χ, n und C_c und in Betracht der Möglichkeit, die unmittelbare Nähe der Pole J und Z bei diesen Messungen gänzlich zu vermeiden, in den Koeffizienten der n und C_c eintragen σ für s und $\Delta G - \chi \sin g_v \operatorname{tang} \delta_z$ unter der Bezeichnung Δg zusammenziehen, sowie weiterhin in den Koeffizienten von χ für g eintragen $G' + \Delta g$ (Lage I) und $G'' - 180^\circ + \Delta g$ (Lage II). Man hat dann zunächst noch:

Lage I

$$\gamma = G' + \Delta g + [n + \chi \sin (g_v - g)] \operatorname{cotg} \sigma + C_c \operatorname{cosec} \sigma \ldots$$

Lage II

$$\gamma = G'' - 180^\circ + \Delta g - [n - \chi \sin (g_v - g)] \operatorname{cotg} \sigma - C_c \operatorname{cosec} \sigma \ldots$$

Das Aggregat $n \pm \chi \sin (g_v - g)$ kann man nun aber sofort mit der Achsenlibelle bestimmen, wenn man dieselbe auf den Zapfen der Horizontalachse K umsetzt, auf denen sie mit ihren Füßen in derselben Weise aufgesetzt wird, wie die zylindrischen Zapfen der Achse in dem Winkel der nahezu ebenen Lagerflächen berührend aufliegen und sich drehen lassen.

Eine Umsetzung der Achsenlibelle auf den Zapfen der Horizontalachse K ist nämlich, wie man leicht sieht, in sphärischem Sinne nichts anderes als eine Drehung um 180°, welche man dem Kreisbogen der Libelle um die Normale zur Achse K erteilt. Der sphärische Ort dieser Normale, den wir mit J_k bezeichnen wollen, wird in dem größten Kreise KJ durch Auftragung der Distanz $KJ_k = 90^\circ$ gefunden, und es ist dann mit Rücksicht auf $KJ = 90^\circ - n$, der Abstand $J_k J = n$ und der Abstand zwischen J_k und der Projektion J_z der Lotrichtung auf den größten Kreis KJ nichts anders als $n + JJ_z$,

wenn man den Abstand von J bis J_z, ebenso wie von J_k bis J positiv in der Richtung nach K hin rechnet. Nun ist aber nach Seite 113

$$JJ_z = -\chi \cos (g_v - g_k) \ldots$$

Man hat also, da mit Weglassung von Q in Lage I $g_k = g - 90^0$ und in Lage II $g_k = g + 90^0$,

$$\text{in Lage I} \quad n + JJ_z = n + \chi \sin (g_v - g) \ldots$$
$$\text{in Lage II} \quad n + JJ_z = n - \chi \sin (g_v - g) \ldots$$

Wir haben früher schon die Zenitdistanz KZ mit $90^0 - i$ bezeichnet. Da nun bei den kleinen Werten von χ und n die Distanz KZ von der Distanz $KJ_z = 90^0 - (n + JJ_z)$ nicht merklich verschieden ist, so hat man auch:

$$i = n + JJ_z$$

und somit schließlich, wenn man den bei Lage I gemessenen Wert von i mit i', den bei Lage II gemessenen mit i'' bezeichnet:

$$\text{Lage I} \quad \gamma = G' + \varDelta g + i' \operatorname{cotg} \sigma + C_c \operatorname{cosec} \sigma \ldots$$
$$\text{Lage II} \quad \gamma = G'' - 180^0 + \varDelta g - i'' \operatorname{cotg} \sigma - C_c \operatorname{cosec} \sigma \ldots$$

In betreff der Bestimmung der Werte i aus den Skalenablesungen bei der Umsetzung der Achsenlibelle auf der Achse K ist nun aber Folgendes festzusetzen, in Abweichung von den vorangehenden Bestimmungen, bei denen die Ablesungen in den beiden einander entgegengesetzten Drehungsphasen der Libellen um die Vertikalachse J immer nach einer und derselben, zu der Richtung nach K hin unverändert bleibenden, Seite der Libellenskale positiv gerechnet werden, während hier in den beiden Phasen die unverändert bleibende Richtung nach K hin, aber nicht mehr eine und dieselbe Richtung in der Skale positiv genommen wird.

Diejenige hypothetische Stelle der Libellenskale, an welcher dieselbe von dem rechtwinklig zu der Achse K gerichteten Radius des Libellenkreisbogens getroffen wird, möge in der einen Phase der Drehung der Libelle um die Parallele zu diesem Radius mit l'_k, dagegen in der andern Phase, also nach der Umsetzung der Libelle, mit l''_k bezeichnet werden, dann ist zunächst $l_k = - l''_k$, weil durch die Umsetzung der Libelle, also ihre Drehung um die Parallele zu jenem Radius, jeder andere Radius des Libellenkreisbogens, z. B. auch der Radius des Nullpunktes der Skale, in eine symmetrisch entgegengesetzte Lage zu dem der Drehungsachse der Libelle parallelen Radius gelangt, also der Ort dieses letzteren in der Skale, wenn

er z. B. vorher von dem willkürlichen Nullpunkt der Skale aus nach K hin lag, jetzt um einen ebenso großen Abstand auf der K entgegengesetzten Seite vom Nullpunkte aus erscheinen muß.

Nennt man die Ablesung für die Blasenmitte in der ersten Phase l' und nach der Umsetzung in der zweiten Phase l'', beide Male von dem an sich willkürlichen Nullpunkt der Libellenskale aus positiv in der Richtung nach K hin genommen, so hat man

$$\text{in der ersten Phase } n + JJ_z = i = l' - l'_k$$
$$\text{„ „ zweiten „ } n + JJ_z = i = l'' - l''_k,$$

also, da nach der obigen Relation $l'_k = - l''_k$ ist,

$$i = \tfrac{1}{2}(l' + l'') \text{ und } l'_k = \tfrac{1}{2}(l' - l'')$$
$$\text{oder auch } l''_k = \tfrac{1}{2}(l'' - l').$$

Wenn man auf solche Weise in der Lage I die Zenitdistanz der Horizontalachse K, also $KZ = KJ_z \ldots = 90^0 - i'$ bestimmt hat, wo also i' die Erhebung oder den Neigungswinkel des K-Endes dieser Achse gegen die Horizontalebene darstellt, und wenn dann in der entgegengesetzten Lage der Achse K, also, bei unverändertem g in der Lage II, für den Neigungswinkel der Achse K der Wert i'' gefunden wird, so hat man nach dem Obigen

$$i' = n + \chi \sin(g_v - g)$$
$$i'' = n - \chi \sin(g_v - g).$$

Falls man dann annehmen darf, daß zwischen diesen beiden Messungen nicht bloß n (die Ergänzung des Winkels zwischen der Achse J und der Achse K zu 90^0), sondern auch χ und g_v unverändert geblieben sind, so hat man:

$$n = \tfrac{1}{2}(i' + i'')\ldots$$

und zugleich auch eine Bedingungsgleichung für χ und g_v:

$$\chi \sin(g_v - g) = \tfrac{1}{2}(i' - i'')\ldots$$

Wir übergehen hier die spezielleren Untersuchungen, welche bei der Bestimmung von i mit der Libelle durch die vorkommenden minimalen Ungleichheiten der Radien der beiden Drehzapfen der Achse K, auf denen die Libelle aufgesetzt wird, erforderlich werden, sowie überhaupt den Einfluß der minimalen Unvollkommenheiten der Zapfengestalten, welche letzteren doch in der Regel in großer Vollendung von den Künstlern hergestellt werden. Dies sind Untersuchungen

von ähnlicher Art, wie diejenigen der Durchbiegungen, welche wir ebenfalls für diesen ersten Abschnitt der sphärischen Messungslehre abgelehnt haben.

Außer der Libelle haben wir noch Messungsmittel für i in den optischen Reflexionsbeobachtungen, mit denen wir den Winkel der Visierachse mit dem Einfallslot spiegelnder Niveauflächen bestimmen können. Wir haben diese Art von Messungen oben Seite 99 bei der Bestimmung des Zenitpunktes der Kreisablesungen des Meridiandurchgangsinstrumentes, sowie auf Seite 110 als ein Mittel zur Bestimmung der Lage der Achse J gegen die Lotrichtung erörtert. Hier ist der Ort, noch darauf hinzuweisen, daß nicht nur die Drehungsphase $180^\circ + S_i$ der Visierachse um K durch solche Reflexionsbeobachtungen festgestellt werden kann, sondern daß man in dieser Drehungsphase auch den Winkel der Visierachse mit der Lotrichtung, nach der in den größten Kreis KJ fallenden Bogenkomponente $J_z S_i$ durch Reflexionsbeobachtungen jener Art ermitteln kann. Man sieht leicht nach allem Vorhergehenden, da $KS_i = 90^\circ + C_c$ und $KJ_z = 90^\circ - i$ ist, daß der Winkel der Visierachse mit der Lotrichtung durch den Bogen $J_z S_i = KS_i - KJ_z = C_c + i$ dargestellt wird. Falls man diese Winkelgröße durch Reflexionsbeobachtung mißt, hat man, wenn für i der durch Libellenablesung gefundene Wert angenommen wird, ein Messungsergebnis für C_c. Für letzteren Wert kann man aber durch vielerlei andere instrumentale Veranstaltungen, u. a. auch durch Vergleichungen aller möglichen Messungsergebnisse in den beiden Lagen des Instrumentes, Bestimmungen erhalten. Wichtiger ist es durch Reflexionsbeobachtungen mit Elimination von C_c oder Eintragung anderweitiger Bestimmungen von C_c Kontrollen für i und für seine Abhängigkeit von den Dimensionen und Formen der Zapfen zu erhalten. Kann man die Achse bei sonstiger unveränderlicher Lage des ganzen Instrumentes so umlegen, daß K eine genaue Ortsveränderung von 180° an der Sphäre erfährt, und wiederholt man dann die Bestimmungen von i mit der Libelle und die Bestimmungen von $i + C_c$ und $i - C_c$, welche letztere man nach der vorerwähnten Umlegung der Achse K erhält, so erlangt man wichtige Kontrollen für alle diese Untersuchungen.

Wir sind auch sonst durch die vorangehenden Ermittelungen schon in der Lage, sozusagen in erster Näherung aus den Einstellungen und Ablesungen am Horizontalinstrumente nunmehr für

die sphärischen Koordinaten im natürlichen Horizontalsystem, nämlich für die Azimute

$$a = \gamma - 180^0 \text{ und } z = \sigma$$

die wesentlichsten Grundlagen zu erhalten.

In den nachstehenden Gleichungen zur Bestimmung von a und z fehlt eigentlich nur noch die jeweilige Kenntnis von Δg.

Wir haben nach Seite 126

in Lage I $a = \gamma - 180^0 = G' - 180^0 + \Delta g + i' \operatorname{cotg} z + C_c \operatorname{cosec} z \ldots$

in Lage II $a = \gamma - 180^0 = G'' + \Delta g - i'' \operatorname{cotg} z - C_c \operatorname{cosec} z \ldots$

ferner nach Seite 121

in Lage I $z = \sigma = \pm (S' - S_i) + \lambda' - \lambda_i \ldots$

in Lage II $z = \sigma = \pm (S_i - S'') + \lambda_i - \lambda'' \ldots$

Zur Bestimmung von Δg müßte außer der oben bereits nachgewiesenen Ermittelung von $-\chi \sin g_v \operatorname{tang} \delta_t$ der wesentliche Charakter der Leitlinie ZP dienen, daß nämlich der Leitpunkt P durch die Drehungserscheinungen der Sternsphäre bestimmt wird. Man wird daher Δg um so unabhängiger von andern Ermittelungen finden, je näher die Beobachtungen, in denen man zunächst hypothetisch oder näherungsweise Δg einträgt, sich wiederum dem Charakter von Einstellungspaaren, also hier von binären Kombinationen in entgegengesetzten Drehungsphasen der Sphäre, nähern, nämlich der Verbindung von Beobachtungen in beiden Kulminationen oder in den beiden größten Digressionen eines Zirkumpolarsterns, östlich und westlich vom Meridian. Näheres wird sich bei den nachfolgenden Anwendungen der Beobachtungen von a und z ergeben.

Physikalische, geodätische und geographische Verwertung der Messungen der Zenitdistanzen und der Azimute.

Wir sind jetzt jedenfalls in der Lage, wenigstens in Verbindung mit Ermittelungen solcher Art, Azimute a und Zenitdistanzen z, und zwar diese letzteren ganz unabhängig von weiteren Untersuchungen der vorerwähnten Art, bestimmen zu können.

Mit Hilfe dieser sphärischen Koordinatenmessungen im Horizontalsystem vermögen wir zunächst Richtungsbestimmungen am Beobachtungsort und Ortsbestimmungen in der Umgebung desselben auszuführen. Wir können die Richtungen von Kräften, z. B. von magnetischen und elektrischen Kräften, und somit auch die Richtungsänderungen derartiger Kräfte in Funktion der Zeit, auf der Grundlage der stetigen Richtung der Schwere und der ebenso stetigen Richtung der Achse der scheinbaren täglichen Drehung des Stern-

himmels feststellen, und wir können dann auf Grund der Richtungsermittlungen auch vollständige relative Ortsbestimmungen in der Umgebung des Beobachtungsortes ausführen, sobald wir den Richtungsermittlungen lineare Abstandsmessungen hinzufügen.

Außerdem aber haben die sphärischen Koordinatenmessungen im Horizontalsystem eine entscheidend wichtige Bedeutung bei der Bestimmung der Lage des Beobachtungsortes selber im Raume und gegen andere beliebig entfernte Beobachtungsörter. Der Beobachtungsort auf der Erdoberfläche wird am Sternhimmel durch den sphärischen Ort seiner Lotrichtung vertreten. Die Rektaszension und die Deklination des Zenits, α_z und δ_z, charakterisieren also die jeweilige Lage des Beobachtungsortes im Raume, allerdings vollständig erst in Verbindung mit der Theorie und der Maßbestimmung der Erdgestalt und der Gesetze der Lotrichtungen auf dem Erdkörper. Aber auch schon bei der Bestimmung der Erdgestalt und dieser Gesetze der Lotrichtungen ist es von entscheidender fundamentaler Wichtigkeit, für viele Beobachtungsörter auf der Erdoberfläche die sphärischen Koordinaten ihrer Lotrichtungen, α_z und δ_z, zu messen und insbesondere von den proportional der Zeit veränderlichen α_z der verschiedenen Beobachtungsörter möglichst viele und darunter auch möglichst genau gleichzeitige Bestimmungen zu erhalten. Die Differenz der für einen und denselben Zeitpunkt ermittelten α_z zweier Beobachtungsörter ist ihre geographische Längendifferenz, und die δ_z sind ihre geographischen Breiten. Die Rektaszension α_z und die Deklination δ_z des Zenits eines Beobachtungsortes wird nun gefunden durch den Anschluß des Zenits an die bekannten Rektaszensionen und Deklinationen α und δ von Gestirnen. Der Übergang aber von dem α und δ eines Gestirns auf α_z und δ_z folgt einfach durch die Messung der Distanz des Sterns vom Zenit und durch die Messung des sphärischen Winkels, welchen der, Gestirn und Zenit verbindende, größte Kreis *SZ* entweder mit dem Polkreise *SP* des Gestirns oder mit dem Polkreise *ZP* des Zenits, d. h. mit dem Meridian des Ortes, macht. Der erstere Winkel ist

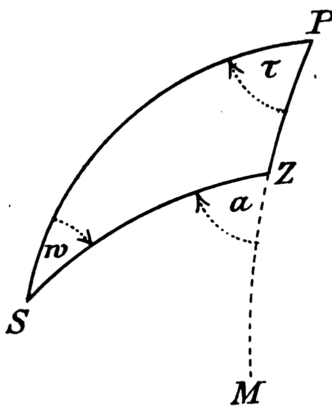


Fig. 14.

instrumental schwerer bestimmbar, der letztere Winkel SZP hängt in einfachster Weise mit dem Azimut a zusammen. Er ist gleich $180^\circ - a$.

In Fig. 14 ist das sphärische Dreieck ZPS dargestellt, in welchem diese Beziehungen zwischen α & δ und α_z & δ_z durch Vermittlung von a & z mit Hilfe der folgenden drei Grundgleichungen ausgedrückt werden. Die drei sphärischen Seiten sind

SZ, bezeichnet mit z
ZP, „ „ $90^\circ - \delta_z$
PS, „ „ $90^\circ - \delta$

und die drei sphärischen Winkel sind

SZP, bezeichnet mit $180^\circ - a$
ZPS, „ „ τ oder $(\alpha_z - \alpha)$
PSZ, „ „ w.

Die Zählung der Winkel geschieht in der Richtung der Pfeilspitzen, nämlich für den von oben hinabblickenden in der Richtung der Uhrzeigerbewegung, und zwar bei a von der Mittagsrichtung ZM des Meridians PZ anfangend, bei τ von PZ anfangend, bei w von SP anfangend. Zunächst haben wir hier zur Verbindung von α_z & δ_z mit α & δ durch a & z die folgende, mit Z bezeichnete Gruppe von drei Grundgleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll} 1 & \sin z \sin a = \cos\delta \sin(\alpha_z - \alpha) \\ 2 & \sin z \cos a = -\sin\delta\cos\delta_z + \cos\delta\sin\delta_z\cos(\alpha_z - \alpha) \\ 3 & \cos z = \sin\delta\sin\delta_z + \cos\delta\cos\delta_z\cos(\alpha_z - \alpha) \end{array}\right\} Z$$

Sind also von einem Gestirn S, dessen α und δ durch die Messungen am natürlichen Äquatorial- oder Meridiandurchgangsinstrument gemäß den Darlegungen auf Seite 93ff. bekannt sind, zur Uhrzeit U die Zenitdistanz z und das Azimut a beobachtet, so kann man zunächst die Sternzeit α_z durch die erste der obigen drei Gleichungen bestimmen, indem man hat:

$$\sin(\alpha_z - \alpha) = \sin z \sin a \sec\delta.$$

Sodann kann man mit der zweiten und dritten Gleichung jetzt die geographische Breite δ_z bestimmen, und zwar mit folgender Einführung von Hilfsgrößen:

Man setzt

$$\sin\delta = b\cos B \text{ und } \cos\delta\cos(\alpha_z - \alpha) = b\sin B,$$

so daß die zweite Gleichung wird:

$$\sin z \cos a = -b \cos(\delta_z + B)$$

und die dritte Gleichung:

$$\cos z = b \sin(\delta_z + B),$$

somit
$$\operatorname{tang}(\delta_z + B) = -\operatorname{cotg} z \sec a,$$

während für B die Einführungsgleichung gilt:

$$\operatorname{tang} B = \operatorname{cotg} \delta \cos(\alpha_z - \alpha)$$

und zur Kontrolle

$$b = \frac{\sin \delta}{\cos B} = \frac{\cos \delta \cos(\alpha_z - \alpha)}{\sin B}.$$

Hierdurch wäre die Aufgabe gelöst, α_z und δ_z zu bestimmen auf Grund der α und δ eines Gestirns, dessen Azimut und Zenitdistanz a und z im Zeitpunkte der Uhrzeit U gemessen sind. Die Bestimmung von α_z, im Moment der Zeitangabe U, erlangt alsdann ihre dauerndere Bedeutung dadurch, daß die Veränderungen der Uhrangabe möglichst nahe entsprechend den Veränderungen der Rektaszension des Zenits oder der Sternzeit erfolgen, so daß $\Delta U = \alpha_z - U$, eine sehr langsam und stetig veränderliche Größe ist, wodurch man dann auch für ganze Reihen von Uhrzeiten mit Hilfe sehr weniger Bestimmungen der ΔU die Kenntnis der zugehörigen α_z erlangen kann. Hierdurch wird auch das Bedenken gegen vorstehende Lösung der Aufgabe vermindert, daß es nämlich für die Genauigkeit der Messungen nicht günstig ist, wenn a und z, zumal unter Beobachtungsumständen, unter denen beide sich schnell ändern, gleichzeitig bei der Uhrzeit U gemessen werden. Findet dagegen die Messung von a zur Uhrzeit U_a und die Messung von z zur Uhrzeit U_z statt, liegen aber die beiden so nahe bei einander und sind die Leistungen der Uhr so gut reguliert, daß in der Zwischenzeit zwischen U_a und U_z die Uhrkorrektion ΔU als unverändert angesehen werden kann, so ist die Möglichkeit vorhanden, mit Hilfe der später zu entwickelnden Gleichungen neben δ_z dieses ΔU als die zweite Unbekannte auch aus getrennten Bestimmungen von a und von z zu ermitteln.

Bevor wir aber näher auf die bestmögliche Behandlung der Aufgabe nach Messung und Rechnung eingehen, ist hin-

sichtlich der Verbindung der α und δ mit den a und z folgendes zu bemerken. Im allgemeinen wird derjenige sphärische Ort des Gestirns S, den man für die Epoche U durch α und δ ausdrückt, nicht vollkommen identisch sein mit demjenigen Ort desselben Gestirns S, dessen a und z man in demselben Zeitpunkt mißt. Wir haben früher mit $\Delta\alpha_t$ und $\Delta\delta_t$ die zeitlichen Änderungen ausgedrückt, welche an die Werte α_0 und δ_0 (die für irgend einen, nicht weit von der Epoche U abliegenden Anfangszeitpunkt gelten sollen) anzubringen sind, um die für U anzunehmenden Werte von α und δ darzustellen. Diese Veränderungen werden durch die bekannten Ortsveränderungen von P und E, sowie durch die Bewegungen des Gestirns selber, seien es die ihm eigentümlichen, seien es die parallaktischen Wirkungen der säkularen Bewegungen unseres ganzen Sonnensystems, hervorgebracht, und es wird außerdem in den Vorausberechnungen der astronomischen Jahrbücher für die α und δ von nahezu einem halben Tausend helleren Sternen und auch des Mondes, der Sonne und der Planeten auch denjenigen Veränderungen Rechnung getragen, welche durch die Abirrung der Lichtstrahlenrichtung von der Einstellungsrichtung der Visierachse infolge der jährlichen Bewegung und der täglichen Drehung der Erde entstehen. Bei den α und δ der Fixsterne wird unter Umständen auch die Parallaxenwirkung der jährlichen Bewegung der Erde berücksichtigt. Hingegen werden die Wirkungen der Strahlenbrechung und der örtlichen (oder tellurischen), sogenannten täglichen Parallaxe, welche den Gestirnort am Himmel ebenfalls veränderlich machen, nicht in die Vorausberechnungen der α und δ mit aufgenommen, weil sie eben örtlich und zeitlich allzu verschieden und zu schnell veränderlich sind, zumal hinsichtlich der Strahlenbrechungen, bei welchen die jeweiligen meteorologischen Zustände so mitbestimmend sind. Aber auch noch aus andern Gründen bringt man diese Veränderungen nicht an die α und δ, sondern an die a und z an. Man reinigt nämlich die a und z von jenen Veränderungen mit Hilfe viel einfacherer Rechnung, als dies bei den α und δ geschehen würde. Die Strahlenbrechung affiziert fast nur die Zenitdistanzen (die Azimutmessungen nur ganz minimal bei sehr großen Werten von $C - C_c$), und auch von der örtlichen Parallaxe gilt ähnliches. Sie affiziert die Azimute, und dies auch bloß mit sehr geringen Beträgen, nur bei der Beobachtung des Mondes, der Sonne und der drei erdnächsten Planeten. Die Reinigung

der Zenitdistanzen von der Strahlenbrechung und von der örtlichen Parallaxe geschieht aber auch mit minimaler Rechnungsmühe nach Formeln, deren Entwicklung die Aufgaben des vorliegenden Heftes ebenso überschreitet, wie die Entwicklung der Formeln für die Veränderungen der α und δ der Sterne durch die Ortsveränderungen von P und E und durch die Abirrungen der Lichtstrahlen von der bewegten Visierachse. Es kommt also hier nur darauf an, sozusagen formal auf die Notwendigkeiten dieser Art und auf gewisse Distinktionen bei der Behandlung jener Veränderlichkeiten der scheinbaren Örter der Gestirne hinzuweisen, durch deren rechnerische Berücksichtigung jene so unvergleichliche Einfachheit und Stetigkeit insbesondere der Fixsternörter am Himmel eigentlich erst in vollem Maße, als eine Gabe der Konsequenz unseres Denkens über diese Dinge, für uns gesichert wird.

Die singulären Fälle der Verwertung der a und z in den verschiedenen Azimuten.

Fortfahrend in der Behandlung unserer Aufgabe, aus α und δ mit Hilfe der gereinigten a und z die α_z und δ_z abzuleiten, wollen wir jetzt nach den obigen Gleichungen einige singuläre Fälle behandeln, welche weiterhin auch geeignete Anhaltspunkte für die allgemeinste und rechnerisch zweckmäßigste Lösung der Aufgabe bieten werden. Zunächst wollen wir die α_z und δ_z für die vollen Quadranten von a bestimmen. Es seien die z beobachtet bei $a = 0^\circ$, 90°, 180°, 270°.

Es ergibt sich aus den Festsetzungen für die Zählung der a und der τ, daß

bei $a = 0^\circ$ $\quad \tau = 0^\circ$
bei $a = 180^\circ$ $\quad \tau = 0^\circ$ zwischen Z und P
und $\tau = 180^\circ$ jenseits P.

Hieraus $\alpha_z = \alpha$ in den beiden ersten Fällen, $\alpha_z = \alpha + 180^\circ$ im dritten Falle. Man hat dann ferner aus der zweiten der obigen Gleichungen:

bei $a = 0^\circ$ $\qquad \delta_z = \delta + z$
bei $a = 180^\circ$ und $\tau = 0^\circ$ $\qquad \delta_z = \delta - z$
bei $a = 180^\circ$ und $\tau = 180^\circ$ $\qquad \delta_z = 180^\circ - \delta - z$.

In betreff der letzten Relation, welche übrigens auch aus den einfachsten graphischen Betrachtungen hervorgeht, sei nur bemerkt, daß dieselbe nicht lediglich aus der zweiten Gleichung ihre Bestätigung erhält; denn diese liefert nur die Formel $\sin(\delta_z + \delta) = \sin z$,

welche zwei Auflösungen hat. Eindeutig wird die Bestimmung erst durch das Hinzukommen der dritten Gleichung, welche im vorliegenden Falle die Formel gibt $\cos(\delta_z + \delta) = -\cos z$.

Für $a = \pm 90^\circ$ findet man zunächst mittels Division der zweiten durch die erste Gleichung die Relation

$$\sin(\alpha_z - \alpha)\operatorname{cotg} a = -\operatorname{tang}\delta\cos\delta_z + \sin\delta_z\cos(\alpha_z - \alpha),$$

somit, da $\operatorname{cotg} a$ im vorliegenden Falle gleich Null ist,

$$\cos(\alpha_z - \alpha) = \operatorname{tang}\delta\cdot\operatorname{cotg}\delta_z$$

und zugleich aus der ersten Gleichung

$$\sin(\alpha_z - \alpha) = \pm\sin z\cdot\sec\delta,$$

endlich durch Eintragung der Gleichung für $\cos(\alpha_z - \alpha)$ in die dritte Gleichung:

$$\sin\delta_z = \frac{\sin\delta}{\cos z}.$$

Bevor ich nun auf weitere singuläre Fälle eingehe, möchte ich einige allgemeinere Darlegungen einfügen in betreff der Bedeutung, welche überhaupt die singulären Fälle mit ihren rechnerischen Vereinfachungen auch für die universale Behandlung von solchen Aufgaben haben. Hierzu ist es aber nötig, jetzt überhaupt etwas näher einzugehen auf das sich immer deutlicher hervorbildende vollkommenste Verfahren der rechnerischen Ableitung von Resultaten aus beobachteten Werten.

Allgemeines in betreff der zweckmäßigsten rechnerischen Behandlung der vorliegenden Aufgaben.

Für eine vollständige, ebensowohl objektiv als subjektiv befriedigende Bearbeitung von Messungen wird jetzt immer allgemeiner eine Anordnung gefordert, bei welcher auch die Grundsätze der Fehlertheorie gehörig berücksichtigt werden, indem man den Gleichungen, aus denen die letzten Ergebnisse der Messungen hervorgehen sollen, diejenige Gestalt gibt, in welcher die Fehlertheorie, entweder sofort oder bei späterer definitiver Bearbeitung, am durchsichtigsten und einfachsten zur Anwendung gelangen kann, nämlich die Gestalt von Lineargleichungen. Zugleich muß die ganze Anordnung der rechnerischen Bearbeitung derartig sein, daß sie es gestattet, die für die Anwendung der Fehlertheorie vorauszusetzende größere Anzahl von Wiederholungen der Messungen, unter nahe verwandten Umständen und Einflüssen, mit dem geringsten Aufwande an rechnerischer Arbeit sowohl zur Ableitung der schließlichen

Ergebnisse, als auch zu Fehleruntersuchungen gehörig zu verwerten. Durch alle diese Forderungen wird immer maßgebender und einleuchtender das nachstehend erläuterte Verfahren verlangt und gerechtfertigt:

Man beginnt mit der Aufstellung von Näherungswerten für alle, das Messungsergebnis unabhängig beeinflussenden Größen, wobei man diese Näherungswerte aus früheren unmittelbaren oder mittelbaren zahlenmäßigen Bestimmungen dieser Größen entnimmt. Je vollständiger und genauer diese Vorarbeit der Aufsuchung von möglichst zutreffenden Näherungswerten ausgeführt ist, und je kleiner infolgedessen die noch unbekannten und zur Bestimmung genauerer Werte dieser Größen gesuchten Verbesserungen der Näherungswerte sind, desto einfacher und durchsichtiger läßt sich dann diese ganze Bearbeitung der Messungsergebnisse gestalten.

Auf Grund der theoretischen Beziehungen, wie sie z. B. durch die obigen Gleichungen zwischen den Werten von α, δ, α_z und δ_z einerseits und andererseits den unmittelbaren Messungsergebnissen (a und z) stattfinden, erlangt man sodann zunächst hypothetisch „theoretische" Näherungswerte für die erfahrungsmäßigen Messungsergebnisse. Im vorliegenden Falle würde man z. B. mit einem Näherungswert von α_z, bezeichnet mit α_z^0, und einem Näherungswert von δ_z, bezeichnet mit δ_z^0, auf Grund der als hinreichend definitiv geltenden Rektaszension α und Deklination δ des Gestirnes, dessen a und z man beobachtet hat, nach den obigen Formeln einen Näherungswert für a, den man mit a^0 bezeichnet, und einen Näherungswert für z, den man mit z^0 bezeichnet, berechnen können. Man hätte dann, wenn man in Kürze die aus der obigen Gleichungsgruppe folgenden theoretischen Beziehungen durch die Funktionsform F ausdrückt:

$$a^0 = F_a\,[\alpha,\, \delta,\, \alpha_z^0,\, \delta_z^0]$$
$$z^0 = F_z\,[\alpha,\, \delta,\, \alpha_z^0,\, \delta_z^0].$$

Dieselben Beziehungen bestehen aber auch zwischen den beobachteten Werten a und z einerseits und andererseits den noch unbekannten wahren (oder wenigstens genaueren) Werten α_z und δ_z in Verbindung mit den einer Verbesserung zunächst nicht bedürftig erscheinenden Werten α und δ. Man hat also:

$$a = F_a\,[\alpha,\, \delta,\, \alpha_z,\, \delta_z]$$
$$z = F_z\,[\alpha,\, \delta,\, \alpha_z,\, \delta_z].$$

Zieht man die einander entsprechenden Gleichungen der beiden Gruppen von einander ab, so ergibt sich:

$$a - a^0 = F_a\,[\alpha, \delta, \alpha_z, \delta_z] - F_a\,[\alpha, \delta, \alpha_z^0, \delta_z^0]$$
$$z - z^0 = F_z\,[\alpha, \delta, \alpha_z, \delta_z] - F_z\,[\alpha, \delta, \alpha_z^0, \delta_z^0].$$

Bezeichnet man nun

die gesuchte Verbesserung $\alpha_z - \alpha_z^0$ mit x
und " " " $\delta_z - \delta_z^0$ " y

und entwickelt man den obigen Unterschied der Funktionen nach der Taylorschen Reihe in Potenzen etc. von x und y, so hat man, mit der durch Kleinhaltung von x und y, also durch möglichst weitgehende Approximation der Näherungswerte an die wahren oder wenigtens genaueren Werte, gerechtfertigten Weglassung der zweiten und höheren Potenzen, sowie der Produkte etc. von x und y, die Gleichungen

$$a - a^0 = \left(\frac{dF_a}{d\alpha_z}\right)x + \left(\frac{dF_a}{d\delta_z}\right)y \ldots$$
$$z - z^0 = \left(\frac{dF_z}{d\alpha_z}\right)x + \left(\frac{dF_z}{d\delta_z}\right)y \ldots$$

wo die Ausdrücke $\left(\frac{dF_a}{d\alpha_z}\right)$ usw. die partiellen ersten Differentialquotienten der Funktionen nach den bezüglichen Variabeln darstellen.

Die Größen auf der linken Seite sind dann numerisch bekannt, teils durch die Beobachtung, wie a und z (welche Werte natürlich, wie oben dargelegt, von den Wirkungen der Strahlenbrechung und der örtlichen Parallaxe, eventuell auch noch von den mehrfach erwähnten, hier zurückgestellten instrumentalen Unvollkommenheiten der Einrichtungen zu reinigen waren), teils durch die Näherungsberechnung, wie a^0 und z^0. Auf der rechten Seite sind die Koeffizienten der beiden Unbekannten x und y theoretisch nach der Form der Funktionen bekannt, numerisch sind sie mit hinreichender Sicherheit berechenbar durch Eintragung der Näherungswerte.

Bevor wir jetzt diese Koeffizienten durch Differenzierung ermitteln, wollen wir zu der obigen Gleichungsgruppe Z noch eine Reihe von Gleichungen aus dem Dreieck ZPS hinzufügen, welche bei der definitiven Formgebung der Differentialquotienten und bei deren Berechnung Erleichterungen bieten können.

Wir wollen diese zusätzlichen Gleichungen, zur Unterscheidung von den drei, unmittelbar für die Lösung unserer Aufgabe dienenden Gleichungen der obigen Gruppe Z, nach besonderen Gruppen einteilen und bezeichnen, von denen die mit I bezeichnete, dem ersten trigonometrischen Hauptsatz, dem Sinussatz, angehört, die mit II zu bezeichnende dem zweiten Hauptsatze, die mit III zu bezeichnende dem Kosinussatz zugehört:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & \cos\delta_z \sin a = \cos\delta \sin w \\ 2. & \sin z \sin w = \cos\delta_z \sin\tau \end{array}\right\} \text{I}$$

$$\left.\begin{array}{llll} 1. & \cos\delta_z \cos a & = - & \sin\delta \sin z + \cos\delta \cos z \cos w \\ 2. & \sin z \cos w & = & \cos\delta \sin\delta_z - \sin\delta \cos\delta_z \cos\tau \\ 3. & \cos\delta \cos w & = & \sin\delta_z \sin z + \cos\delta_z \cos z \cos a \\ 4. & \cos\delta \cos\tau & = & \cos\delta_z \cos z + \sin\delta_z \sin z \cos a \\ 5. & \cos\delta_z \cos\tau & = & \cos\delta \cos z - \sin\delta \sin z \cos w \end{array}\right\} \text{II}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & \sin\delta_z = \sin\delta \cos z + \cos\delta \sin z \cos w \\ 2. & \sin\delta = \sin\delta_z \cos z - \cos\delta_z \sin z \cos a \end{array}\right\} \text{III}$$

Um nun zur näheren Bestimmung der oben eingeführten partiellen ersten Differentialquotienten zu gelangen, haben wir diejenige der obigen Gleichungen, in denen einerseits z ausschließlich, andererseits nur α, δ, α_z, δ_z vorkommen und diejenige, durch Division der Gleichungen 1 und 2 der Gruppe Z oben schon gefundene Gleichung, in welcher links nur a und rechts nur α, δ, α_z, δ_z vorkommen, total zu differenzieren, wobei wir auch α und δ in die Differenzierung hineinziehen wollen im Hinblick darauf, daß es auch Fälle gibt, in denen die Rektaszension und Deklination des beobachteten Gestirnes auch noch einer Prüfung und einer eventuellen Ermittlung einer Korrektion $d\alpha$ und $d\delta$ bedürftig sein kann.

Wir legen also zunächst der Differenzierung zu Grunde die Gleichung $Z3$

$$\cos z = \sin\delta \sin\delta_z + \cos\delta \cos\delta_z \cdot \cos(\alpha_z - \alpha)$$

und $Z2$ geteilt durch $Z1$

$$\operatorname{cotg} a = -\operatorname{tang}\delta \cos\delta_z \operatorname{cosec}(\alpha_z - \alpha) + \sin\delta_z \operatorname{cotg}(\alpha_z - \alpha).$$

Zur Abkürzung wollen wir im folgenden für $\alpha_z - \alpha$ in den Koeffizienten stets setzen τ, und außerdem für α_z^0, wie oben schon mehrfach geschehen, einführen $U + \Delta U^0$, so daß für $\alpha_z - \alpha_z^0 = x$ auch $\Delta U - \Delta U^0 = x$ eingetragen werden kann.

Die totale Differenzierung der Gleichung für $\cos z$, welche

implizite die Funktion F_z darstellt, ergibt zunächst, nachdem sofort mit $\sin 1''$ auf beiden Seiten dividiert ist,

$$-\sin z \cdot dz = \cos\delta \cos\delta_z \sin\tau \cdot d\alpha$$
$$+ (\cos\delta \sin\delta_z - \sin\delta \cos\delta_z \cos\tau) \cdot d\delta \ldots$$
$$- \cos\delta \cos\delta_z \sin\tau \cdot x + (\sin\delta \cos\delta_z - \cos\delta \sin\delta_z \cos\tau) \cdot y \ldots$$

Trägt man in den Koeffizienten von $d\alpha$ und von x die Gleichung $Z1$, ferner in den Koeffizienten von $d\delta$ die Gleichung II 2, und in den Koeffizienten von y die Gleichung $Z2$ ein, so hat man nach Division beider Seiten durch $-\sin z$

$$dz = -\cos\delta_z \sin a \cdot d\alpha - \cos w \cdot d\delta + \cos\delta_z \sin a \cdot x + \cos a \cdot y \ldots$$

so daß, wenn wir bis auf weiteres $d\alpha$ und $d\delta$ aus dem Spiel lassen, übrig bleibt

$$dz = \cos\delta_z \sin a \cdot x + \cos a \cdot y \ldots$$

Es ist dann, nach den obigen Einführungen, der partielle Differentialquotient

$$\left(\frac{dF_z}{d\alpha_z}\right) = \left(\frac{dz}{x}\right) = \cos\delta_z \sin a$$

und
$$\left(\frac{dF_z}{d\delta_z}\right) = \left(\frac{dz}{y}\right) = \cos a,$$

so daß man schließlich zur Bestimmung von x und y aus beobachteten Zenitdistanzen z die Bedingungsgleichung hat:

$$z - z^0 = x \cos\delta_z \sin a + y \cos a \ldots$$

Wir haben ferner entsprechend zu verfahren mit der obigen Gleichung für $\operatorname{cotg} a$. Die totale Differenzierung derselben nach α, δ, α_z, δ_z ergibt zunächst:

$$-\frac{da}{\sin^2 a} = -(\operatorname{tang}\delta \cos\delta_z \operatorname{cosec}\tau \operatorname{cotg}\tau - \sin\delta_z \operatorname{cosec}^2\tau) \cdot d\alpha$$
$$- \sec^2\delta \cos\delta_z \operatorname{cosec}\tau \cdot d\delta$$
$$+ (\operatorname{tang}\delta \cos\delta_z \operatorname{cosec}\tau \operatorname{cotg}\tau - \sin\delta_z \operatorname{cosec}^2\tau) \cdot x$$
$$+ (\operatorname{tang}\delta \sin\delta_z \operatorname{cosec}\tau + \cos\delta_z \operatorname{cotg}\tau) \cdot y.$$

Trägt man nun, nachdem beide Seiten der Gleichung mit $\cos^2\delta \sin^2\tau$ multipliziert sind, in den Koeffizienten von da die Gleichung Z1, in die Koeffizienten von $d\alpha$ und von x die Gleichung II2, ferner in den Koeffizienten von $d\delta$ die Gleichung I2 und in den

Koeffizienten von y die Gleichung Z_1 und Z_3 ein, so hat man, nach schließlicher Division derganzen Gleichung mit $-\sin z$:

$$da \sin z = -\cos\delta \cos w \cdot d\alpha + \sin w \cdot d\delta + \cos\delta \cos w \cdot x - \cos z \sin a \cdot y.$$

Sieht man bis auf weiteres auch hier von den Verbesserungen $d\alpha$ und $d\delta$ ab, so folgt:

$$da \sin z = \cos\delta \cos w \cdot x - \cos z \sin a \cdot y.$$

Hier kann es in weiterer Anwendung des Koeffizienten von x zweckmäßiger sein, für $\cos\delta \cos w$ die rechte Seite der Gleichung II 3 einzutragen, so daß auch:

$$da \cdot \sin z = (\sin\delta_z \sin z + \cos\delta_z \cos z \cos a) \cdot x - \cos z \sin a \cdot y.$$

Verfährt man jetzt wieder, wie oben bei dz, so hat man

$$\left(\frac{dF_a}{d\alpha_z}\right) = \left(\frac{da}{x}\right) = \operatorname{cotg} z \cos a \cos\delta_z + \sin\delta_z$$

$$\left(\frac{dF_a}{d\delta_z}\right) = \left(\frac{da}{y}\right) = -\operatorname{cotg} z \sin a$$

also schließlich:

$$a - a^0 = x(\operatorname{cotg} z \cos a \cos\delta_z + \sin\delta_z) - y \operatorname{cotg} z \sin a.$$

Stellt man die vorangehende Gleichung für $z - z^0$ mit der vorliegenden für $a - a^0$ zusammen, so sieht man sofort, in welcher einfachen Korrelation die Bestimmung von x und y, mit anderen Worten die Bestimmung der Sternzeit und die Bestimmung der geographischen Breite oder Polhöhe, mit den Quadranten des Azimutes steht.

Bei:

$$a = 0^0 \quad \text{ist } z - z^0 = y \quad \text{und } a - a^0 = \frac{\cos(\delta_z - z)}{\sin z} \cdot x = \frac{\cos\delta}{\sin z} \cdot x$$

$$a = 180^0 \text{ ist } z - z^0 = -y \text{ und } a - a^0 = -\frac{\cos(\delta_z + z)}{\sin z} \cdot x = \mp \frac{\cos\delta}{\sin z} \cdot x.$$

Das obere Zeichen bei $a - a^0$ für $a = 180^0$ gilt, wie man leicht sieht, für $\tau = 0^0$, das untere für $\tau = 180^0$.

Bei $a = 0^0$ oder 180^0, also in der Nähe des Meridians, bestimmt man also aus der Beobachtung der Zenitdistanzen die geographische Breite und aus der Beobachtung der Azimute die Zeit.

Dagegen hat man:

bei $a = 90^0$ .. $z - z^0 = x \cos \delta_z$ $\quad a - a^0 = x \sin \delta_z - y \operatorname{cotg} z$

bei $a = 270^0$ .. $z - z^0 = - x \cos \delta_z$ $\quad a - a^0 = x \sin \delta_z + y \operatorname{cotg} z$.

Also in der Nähe von $a = \pm 90^0$ (in der Nähe des Ostwestvertikals) bestimmt man aus der Beobachtung der Zenitdistanzen die Zeit und aus der Beobachtung der Azimute sowohl die Zeit als die geographische Breite, aber am günstigsten die Breite.

Zur Benutzung in besonderen Fällen fassen wir noch die folgenden partiellen Differentialquotienten, die auch in den vorstehenden Entwickelungen enthalten sind, hier zusammen:

$$\left(\frac{dz}{d\alpha}\right) = - \cos \delta_z \sin a \quad \left(\frac{dz}{d\delta}\right) = - \cos w$$

$$\left(\frac{da}{d\alpha}\right) = - \frac{\cos \delta \cos w}{\sin z} \quad \left(\frac{da}{d\delta}\right) = \frac{\sin w}{\sin z}.$$

Für $\left(\frac{dz}{d\alpha}\right)$ kann man durch Eintragung der obigen Gleichung I 1 auch setzen $- \cos \delta \cdot \sin w$. Hinsichtlich der Berechnung von w, welches hier eine wesentliche Rolle spielt, wollen wir noch darauf hinweisen, daß der Winkel w nach den obigen Festsetzungen über die Zählungsrichtungen zwischen 0^0 und $+180^0$ liegt auf der Westseite des Meridians und zwischen 0^0 und -180^0 auf der Ostseite des Meridians.

Die geographische Ortsbestimmung mit Anwendung der Differentialformeln.

Mit Hilfe der obigen Gleichungen für $z - z^0$ und $a - a^0$ kann man nun die Unbekannten x und y in der verschiedenartigsten Weise ermitteln und zwar sowohl aus den z allein, als aus den a allein. Zwei Beobachtungen von z, die eine in der Nähe des Meridians, die andere in der Nähe des Ostwestvertikals angestellt, genügen, um Zeit und Breite, also die Grundlagen der geographischen Orientierung des Beobachtungsortes zu bestimmen.

Hat man die Zenitdistanz z_1 eines Gestirns S_1 (α_1 und δ_1) in der Nähe des Meridians und der Oberen Kulmination zur Uhrzeit U_1 und die Zenitdistanz z_2 eines Gestirnes S_2 (α_2 und δ_2) in der Nähe des Westvertikals zur Uhrzeit U_2 beobachtet und liegen die beiden Uhrzeiten so nahe zusammen, daß man den Näherungswert ΔU^0 für beide als identisch annehmen oder mit aller Sicherheit von der einen auf die andere Uhrzeit übertragen kann, so daß ausreichend sicher

$$\Delta U_1 - \Delta U_1^0 = \Delta U_2 - \Delta U_2^0 = x$$

gesetzt werden kann, so hat man:

$$z_1 - z_1^0 = (x \cos \delta_z \sin a_1) + y \cos a_1 \ldots$$
$$z_2 - z_2^0 = x \cos \delta_z \sin a_2 \; (+ y \cos a_2),$$

wo $z_1^0 = F_z(\alpha_1, \delta_1, U_1 + \varDelta U_1^0, \delta_z^0)$ und $z_2^0 = F_z(\alpha_2, \delta_2, U_2 + \varDelta U_2^0, \delta_z^0)$.

Hieraus unter obigen Annahmen mit großer Annäherung:

$$(y) = z_1 - z_1^0 \ldots \qquad (x) = (z_2 - z_2^0) \sec \delta_z \ldots$$

und die letzten Verbesserungen dieser Näherungswerte ergeben sich mit Eintragung der Werte von a_1 und a_2 dann sehr bequem und konvergent:

$$y = (z_1 - z_1^0) \sec a_1 - (z_2 - z_2^0) \operatorname{tang} a_1$$
$$x = (z_2 - z_2^0) \sec \delta_z \operatorname{cosec} a_2 - (z_1 - z_1^0) \sec \delta_z \operatorname{cotg} a_2 .$$

Da es wichtige und der geographischen Ortsbestimmung unablässig bedürftige Lebens- und Verkehrsgebiete, wie die Schiffahrt, gibt, in denen bloß Messungen von z und überhaupt keine sichern Azimutmessungen möglich sind, so hat die obige Aufgabe sehr umfassende und vielartige Bearbeitungen, auch mit Tabellen und graphischen Methoden und Hilfsmitteln, gefunden. Wir gehen hier nicht näher darauf ein.

Es ist hier zu einer Art von Abschluß nach dieser Seite hin nur zu bemerken, daß, nachdem durch die Bestimmung von x die Kenntnis der Rektaszension des Zenits des Beobachtungsortes, also der Ortszeit erlangt ist, auch die geographische Länge des Beobachtungsortes gegen einen Meridian von bekannter Lage gefunden werden kann, sobald man die gleichzeitige entsprechende Ortszeit dieses letzteren Meridians kennt. Dies leisten bekanntlich in der einfachsten und stetigsten Weise transportable Zeitmessungseinrichtungen (Chronometer), welche mit Hilfe andauernder vorheriger experimenteller und rechnerischer Erforschung ihres Ganges und dann mit Fortführung des so ermittelten Veränderungsgesetzes ihrer $\varDelta U$, so nahe und so stetig die Zeit eines bestimmten Meridians konservieren, daß der Übergang von der Ortszeit auf die geographische Längendifferenz des Ortsmeridians gegen denjenigen Meridian, für dessen Ortszeit jene Chronometerangaben gelten, ausreichend gesichert ist.

Die absolute Azimutbestimmung.

Hinsichtlich der Azimutbeobachtungen ist noch zu bemerken, daß die obigen Gleichungsformen uns nun auch die bequeme Möglichkeit geben, die oben noch etwas unbestimmt gelassenen

Ermittelungen hinsichtlich der Werte Δg fester zu gestalten. Tragen wir nämlich in die Ausdrücke $a - a^0$ die instrumentale Gleichung für a ein, so haben wir:

in Lage I

$$a - a^0 = G' - 180^0 + \Delta g + i' \operatorname{cotg} z + C_c \operatorname{cosec} z - a^0$$
$$= x \cos \delta \cos w \operatorname{cosec} z - y \operatorname{cotg} z \sin a$$

in Lage II

$$a - a^0 = G'' + \Delta g - i'' \operatorname{cotg} z - C_c \operatorname{cosec} z - a^0$$
$$= x \cos \delta \cos w \operatorname{cosec} z - y \operatorname{cotg} z \sin a.$$

Führt man jetzt für Δg den Ausdruck ein $\Delta g^0 - k$, wo Δg^0 ein Näherungswert und k seine letzte Korrektion ist, und fasst man dann

$$G' - 180^0 + \Delta g^0 + i' \operatorname{cotg} z + C_c \operatorname{cosec} z$$
$$\text{und } G'' + \Delta g^0 - i'' \operatorname{cotg} z - C_c \operatorname{cosec} z$$

indifferent als die zahlenmäßigen Beobachtungsergebnisse unter der Bezeichnung (a) zusammen, so hat man:

$$(a) - a^0 = +k + x \cos \delta \cos w \operatorname{cosec} z - y \operatorname{cotg} z \sin a.$$

Man sieht sofort, daß hier k sozusagen absolut, nämlich ganz oder fast ganz unabhängig von x und y bestimmt werden kann, sobald $\cos w$ gleich Null und zugleich $\sin a$ sehr klein und dabei $\operatorname{cotg} z$ nicht sehr groß ist, also bei einer größten Digression eines dem Pol nahen Sternes. Zugleich ersieht man, daß schon die Wahl eines dem Pol sehr nahen Sternes, für den $\cos \delta$ sehr klein ist, auch bei beliebigen Werten von w sehr frei von der Zeitbestimmung (x) macht. Der Einfluß von y kann dabei sogar vollständig beseitigt werden, wenn man einen Mittelwert aus den Ergebnissen in der östlichen und westlichen Digression bildet. Auch der Einfluß von unbekannten $d\alpha$ und $d\delta$ kann hierdurch zum Verschwinden gebracht werden, wie man aus den obigen Ausdrücken für $\left(\frac{da}{d\alpha}\right)$ und $\left(\frac{da}{d\delta}\right)$ ersieht, da $\sin w$ bei der westlichen Digression gleich $+1$, bei der östlichen gleich -1 ist. Diese sozusagen absolute Bestimmung von k ist von Wichtigkeit bei den genauesten Orientierungen der Richtungen der geoidischen Dreiecksseiten in der Geodäsie.

Wenn wir an dieser Stelle auf weitere eingehende Erörterungen von verschiedenen Anwendungsfällen der vorstehenden Grundlage der sogenannten geographischen Ortsbestimmung, d. h. der Ableitung

Die Berechnung der Näherungswerte a^0 und z^0.

der α_s und δ_s aus beobachteten a und z, verzichten, mit dem Vorbehalte zum Schluß dieses Heftes noch mit einem kurzen Hinweis auf die unabhängigste und fehlerfreieste Methode dieser Bestimmungen, unter gleichzeitiger genauester Bestimmung der α und δ, zurückzukommen, so bleibt doch jetzt noch einiges zu sagen über die sicherste und einfachste Art der Berechnung der Näherungswerte a^0 und z^0. Bei den weniger genaueren Beobachtungen in der geographisch-nautischen Praxis ist dies mit Hilfe der Gleichungen Z ziemlich leicht, aber bei den strengsten Anforderungen an die Beobachtung und demgemäß auch an die Berechnung, sowie bei der Berechnung sehr großer Reihen von Beobachtungen ist es eine sehr wichtige Angelegenheit, daß die rationellsten Methoden und Formen der Berechnung der Näherungswerte zur Anwendung kommen. Auch für die Berechnung der Koeffizienten können hierbei noch Anhaltspunkte im Sinne der Erleichterung der Arbeit gegeben werden, so lange man noch keine umfassenden Hilfstafeln dafür besitzt.

Es handelt sich also darum, die Näherungswerte a^0 und z^0 aus den Werten α^0 und δ^0, sowie α_z^0 und δ_z^0 mit möglichst geringer Mühe bei größtmöglicher Sicherung eines bestimmten Genauigkeitsgrades abzuleiten. Der äußerste Genauigkeitsgrad, der dabei in Frage kommen kann und zwar bei den sogenannten absoluten Bestimmungen, bei denen auch $d\alpha$ und $d\delta$ mit in die letzte Ausgleichung hineingezogen werden, ist zur Zeit das Hundertstel der Bogensekunde; der geringste in der Praxis der Richtungs- und Ortsbestimmungen in Frage kommende Genauigkeitsgrad der Berechnung der Näherungswerte wird etwa das Zehntel der Bogenminute sein. Bei der Berechnung der Koordinatenwerte für die Koeffizienten in den obigen Gleichungen wird aber, da diese Gleichungen nur kleine Winkelgrößen enthalten, die bei gehöriger Umsicht der Vorarbeit als Größen erster Ordnung gelten können, stets das Zehntel der Bogenminute, sehr oft die Bogenminute und sogar das Zehntel des Grades als rechnerische Genauigkeitsgrenze genügen.

Wir wollen den bezüglichen Darlegungen und Ratschlägen in diesem, den Schluß unseres ersten Heftes bildenden Abschnitt einen etwas breiteren Raum gewähren, weil dieselben auch eine gewisse allgemeinere Bedeutung für die Sphärik und für die Goniometrie überhaupt besitzen.

Zunächst möge noch die alle Seiten und Winkel unsers Dreiecks PZS umfassende Gruppe der vier Gaußischen Gleichungen

hier ihren Platz finden, da sie für die Berechnung der in den obigen Gleichungen auftretenden Koeffizienten, in denen alle drei Winkel unsers Dreiecks vorkommen, zweckmäßige Anwendung finden kann:

$$\left.\begin{array}{ll}1. & \cos\frac{1}{2}(a-w)\cos\frac{1}{2}z=\cos\frac{1}{2}\tau\cos\frac{1}{2}(\delta_z-\delta)\\ 2. & \sin\frac{1}{2}(a-w)\cos\frac{1}{2}z=\sin\frac{1}{2}\tau\sin\frac{1}{2}(\delta_z+\delta)\\ 3. & \cos\frac{1}{2}(a+w)\sin\frac{1}{2}z=\cos\frac{1}{2}\tau\sin\frac{1}{2}(\delta_z-\delta)\\ 4. & \sin\frac{1}{2}(a+w)\sin\frac{1}{2}z=\sin\frac{1}{2}\tau\cos\frac{1}{2}(\delta_z+\delta)\end{array}\right\}G.$$

Trägt man auf der rechten Seite die numerischen Näherungswerte ein, nämlich $\tau^0=\alpha_z^0-\alpha^0=U+\Delta U^0-\alpha'$, sowie δ_z^0 und δ^0, so findet man links die entsprechenden Näherungswerte von a^0, z^0 und w^0. Für die Werte a^0 und z^0 könnte man in den Koeffizienten der Unbekannten auch die Beobachtungswerte a und z selber einsetzen; aber es kommen viele Fälle vor, ja in der geographischen Ortsbestimmung sind es sogar die überwiegenden, in denen man bloß z unmittelbar beobachtet, also a doch aus den Näherungswerten berechnen muß. Und für w ist letzteres unumgänglich. Auch hat es einen gewissen Wert, für die Beobachtung von z aus der obigen, a und w zugleich umfassenden Gleichungsgruppe, die mit G bezeichnet werden möge, auch sofort eine ungefähre Kontrolle aus den Näherungswerten der andern Größen zu erhalten.

Die gesonderte Berechnung der Näherungswerte z^0.

Was nun die genauere Berechnung des Näherungswertes z^0 betrifft, so kann derselbe aus der unveränderten Gleichung $Z3$ sogar mit siebenstelligen Logarithmen im allgemeinen nur mit der Genauigkeit von 0″,05 berechnet werden. Wir wollen aber bei diesen Näherungswerten von z und a, im Hinblick auf die vorkommenden genauesten Anwendungen solcher Beobachtungen zu mancherlei kritischen Untersuchungen, die rechnerische Fehlergrenze bei der Bearbeitung der Beobachtungen hier auf etwa 0″,01 bis 0″,02 ansetzen. Dies läßt sich, wenn man nicht achtstellige Logarithmentafeln anwendet, was, zumal bei dem Fehlen sehr vollständiger und bequemer Tafeln dieser Art, die Rechnungsmühe wesentlich vergrößert, nahezu durch geeignete Umformungen erreichen, welche übrigens auch das oben schon erwähnte allgemeinere goniometrische Interesse darbieten.

Etwas besser als die einfache Gleichung für cos z wird schon eine, gerade für kleinere Werte von z günstige Umformung:

$$\sin^2\tfrac{1}{2}z=\sin^2\tfrac{1}{2}(\delta_z-\delta)+\cos\delta\cos\delta_z\sin^2\tfrac{1}{2}\tau$$

oder auch

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} z = \cos^2 \tfrac{1}{2} \tau \sin^2 \tfrac{1}{2} (\delta_z - \delta) + \sin^2 \tfrac{1}{2} \tau \cos^2 \tfrac{1}{2} (\delta_z + \delta).$$

Man hat aber auch durch eine andere leichte Umformung:

$$\sin \tfrac{1}{2} [z - (\delta_z - \delta)] = \frac{\cos \delta \cos \delta_z \sin^2 \tfrac{1}{2} \tau}{\sin \tfrac{1}{2} [z + (\delta_z - \delta)]}$$

oder wenn man kurz $\frac{1}{2}[z - (\delta_z - \delta)]$ mit $\varDelta$ bezeichnet:

$$\sin \varDelta = \frac{\cos \delta \cos \delta_z \sin^2 \tfrac{1}{2} \tau}{\sin [\delta_z - \delta + \varDelta]}.$$

Durch Umformungen letzterer Art kann eine sehr große Erhöhung der rechnerischen Genauigkeit auch mit weniger als sieben logarithmischen Stellen erreicht werden, doch bedarf die rechnerische Behandlung einer solchen „transzendenten" Gleichung, welche die Unbekannte $\varDelta$ in verschiedenen trigonometrischen Funktionsformen enthält, einer näheren Erläuterung. Wir werden aber sogleich sehen, daß Gleichungen von ähnlicher Form für das vorliegende Problem der zweckmäßigsten Berechnung von Näherungswerten und besonders bei sehr zahlreichen einzelnen Beobachtungen in großen Gruppen eine allgemeine Bedeutung haben, so daß wir die Lösung solcher Gleichungen weiterhin näher besprechen werden.

Wenn es sich darum handelt, mit einer für gewöhnliche geographische Ortsbestimmung ausreichenden Genauigkeit für zahlreiche Beobachtungen an einem und demselben Orte die a und z in den Koeffizienten und auch in den Ausdrücken für die Näherungswerte zu berechnen, kann folgende Umformung dienlich sein:

Man setzt
$$\sin \delta_z = \cos M \cos \psi$$
$$\cos \delta_z \cos \tau = \cos M \sin \psi$$
$$\cos \delta_z \sin \tau = \sin M$$

so daß:
$$\operatorname{tang} \psi = \operatorname{cotg} \delta_z \cos \tau$$
$$\operatorname{tang} M = \operatorname{tang} \tau \sin \psi = \operatorname{cotg} \delta_z \sin \tau \cos \psi$$

und man hat dann:
$$\cos z = \cos M \sin (\psi + \delta),$$

außerdem aber nach Gleichung I 2 und nach Gleichung II 3:

$$\sin z \sin w = \sin M \text{ und } \sin z \cos w = \cos M \cos (\psi + \delta),$$

so daß:
$$\operatorname{tang} w = \operatorname{tang} M \sec (\psi + \delta)$$

und
$$\sin z = \sin M \operatorname{cosec} w \text{ oder } = \cos M \cos (\psi + \delta) \sec w$$

schließlich:

$$\cot z = \operatorname{tang}(\psi + \delta) \cos w \quad \text{oder auch} = \sin(\psi + \delta) \cot M \sin w.$$

Diese Berechnungsform wird wesentlich erleichtert, wenn die Hilfsgrößen ψ und $\operatorname{tang} M$ für einen bestimmten Ort, dessen Breite gleich δ_z ist, tabelliert vorliegen. Dies kann aber nicht wohl auf $0'',01$, sondern etwa auf die Zehntelminute geschehen.

Für eine analoge Form der Berechnung hatten wir bereits oben (Seite 131) einen Ausdruck, der dort zur gesonderten Ableitung von δ_z aus a diente. Mit einer kleinen Abänderung können wir denselben zur Berechnung von z, zugleich mit der Berechnung von a, anwenden. Wir setzen:

$$\sin \delta = \cos N \cos B$$
$$\cos \delta \cos \tau = \cos N \sin B$$
$$\cos \delta \sin \tau = \sin N$$

so daß $\quad \operatorname{tang} B = \cot \delta \cos \tau \quad$ und $\quad \operatorname{tang} N = \operatorname{tang} \tau \sin B$

und hiermit

$$\sin z \sin a = \sin N$$
$$\sin z \cos a = -\cos N \cos (B + \delta_z)$$
$$\cos z = \cos N \sin (B + \delta_z)$$

also

$$\operatorname{tang} a = -\operatorname{tang} N \sec (B + \delta_z)$$

und

$$\cot z = \sin (B + \delta_z) \cot N \sin a$$

oder

$$= -\operatorname{tang} (B + \delta_z) \cos a.$$

Wesentlich vereinfachte und dabei recht genaue Formeln für die Berechnung der Näherungswerte von a und z erlangt man sodann für gewisse singuläre Werte von a, τ und w, wovon oben bereits ein Beispiel für $a = 0^\circ$ und 180° und für $a = \pm 90^\circ$ gegeben wurde. Ähnliche Erleichterungen, wie die letzteren, bieten die singulären Werte $a = \pm 45^\circ$, ferner die singulären Werte $\tau = \pm 90^\circ$ und $w = \pm 90^\circ$. Durch alle diese singulären Fälle wird aber der ganze Umkreis derartig eingeteilt, daß man bei Beobachtungen in beliebigen a oder τ immer ziemlich nahe an einer der singulären Wertgruppen sich befindet und dann den Übergang auf die zu den Beobachtungsumständen a oder τ selber gehörigen Näherungswerte durch eine Art von Differenzformel machen kann, die sich einer Differentialprozedur nähert, aber beliebige Strenge zu erreichen gestattet. Von dieser Differenzformel bietet in betreff von z die Formel für Δ (Seite 146) das einfachste Beispiel dar. Der doppelte

Die singulären Näherungswerte.

Betrag von Δ ist nämlich die Korrektion, die für den Stundenwinkel τ, in welchem eine Beobachtung von z stattgefunden hat, an denjenigen singulären Wert von z^0 anzubringen ist, der für $a = 0$ nach Seite 134 im Betrage von $\delta_z^0 - \delta^0$ gefunden wird. Es ist dann $\delta_z^0 - \delta^0 + 2\Delta$ der für den betreffenden Stundenwinkel τ der Beobachtung von z geltende, genau berechnete Näherungswert z^0.

Die Formel für Δ ist eigentlich für beliebige Werte von τ anwendbar, aber es ist einleuchtend, daß ihre rechnerische Auflösung um so weniger bequem sein, nämlich um so mehr logarithmische Stellen verlangen wird, je größer $\sin \frac{1}{2} \tau$ ist. Ganz allgemein würde eine Übertragungsformel für den Übergang von irgend einem singulären auf einen beliebigen aktuellen Näherungswert von z sich folgendermaßen aufbauen.

Wir wollen einen der bezüglichen singulären Werte von a oder von τ generell mit a_s oder mit τ_s bezeichnen. Die singulären Werte $w = \pm 90^0$ lassen sich leicht durch zugehörige singuläre Werte von τ ausdrücken, ähnlich wie weiterhin auch die singulären Werte von a durch die zugehörigen Werte der τ zu ersetzen sein werden, von denen man stets am leichtesten mit Hilfe der Uhrzeit U den Ausgang nehmen kann.

Die für die Näherungswerte oben eingeführten oberen Indices Null können bei den nachfolgenden Erörterungen, die sich nur auf Näherungswerte beziehen werden, füglich wegbleiben.

Wir haben also aus der dritten Grundgleichung für z_s bei einem singulären Werte τ_s

$$\cos z_s = \sin \delta \sin \delta_z + \cos \delta \cos \delta_z \cos \tau_s,$$

ebenso für z bei dem der Beobachtungszeit entsprechenden Werte τ

$$\cos z = \sin \delta \sin \delta_z + \cos \delta \cos \delta_z \cos \tau$$

also

$$\cos z - \cos z_s = \cos \delta \cos \delta_z (\cos \tau - \cos \tau_s)$$

oder, goniometrisch entwickelt, wenn wir setzen $(z - z_s) = \Delta z_s$

$$\sin \tfrac{1}{2} \Delta z_s = \frac{\cos \delta \cos \delta_z \sin \frac{1}{2} (\tau - \tau_s) \sin \frac{1}{2} (\tau + \tau_s)}{\sin (z_s + \frac{1}{2} \Delta z_s)}.$$

Man sieht leicht, daß die obige Formel für $\sin \Delta$ (Seite 146) nur ein spezieller Fall hiervon ist, nämlich für den Wert $\tau_s = 0$, welchem $z_s = \delta_z - \delta$ entspricht.

Die Lösung der transzendenten Gleichung für Δz_s gehört einem Typus an, dessen allgemeinere Form sein würde:

$$f(x) = A \times F(C \pm x).$$

Die Übertragungen durch transzendente Differenzengleichungen.

In dem vorliegenden Falle sind die beiden Funktionen f und F trigonometrische Funktionen.

Die Auflösung geschieht durch Näherung ziemlich leicht in folgender Weise. Ein Näherungswert x_1 wird stets leicht zu beschaffen sein und zwar mit Hilfe der beobachteten Werte von z. So würde z. B. hier als erster Näherungswert für x_0 sofort gegeben sein $\frac{1}{2}(z - z_s^0)$, wo z_s^0 der singuläre Näherungswert von z für τ_s^0 in Funktion von δ_s^0 und δ^0 und wo z der im Stundenwinkel τ unmittelbar beobachtete (natürlich von Strahlenbrechung usw. ausreichend gereinigte) Wert der Zenitdistanz wäre.

Bezeichnet man den partiellen Differentialquotienten $\left(\frac{d f(x)}{dx}\right)$ mit l und den partiellen Differentialquotienten $\left(\frac{d F(C \pm x)}{d(C \pm x)}\right)$ mit m und berechnet man zunächst aus der obigen Gleichung $f(x)$ denjenigen mit x_1 zu bezeichnenden Wert von x auf der linken Seite, welcher der Eintragung des Näherungswertes x_0 in dem Ausdruck auf der rechten Seite entspricht, so daß:

$$f(x_1) = A \times F(C \pm x_0),$$

während derjenige Wert von x der gesuchte und definitive ist, für welchen eben die Gleichung genau erfüllt ist:

$$f(x) = A \times F(C \pm x).$$

Ist nun der Näherungswert x_0 bis auf eine kleine Größe erster Ordnung schon nahe gleich dem gesuchten Werte x, so kann man auch setzen

$$f(x) - f(x_1) = l(x - x_1) \ldots$$

und $$F(C \pm x) - F(C \pm x_0) = \pm m(x - x_0) \ldots$$

also auch $$l(x - x_1) = \pm A m (x - x_0).$$

Da nun $x - x_0$ auch gleich $x - x_1 + x_1 - x_0$, so hat man auch:

$$(x - x_1 (l \mp Am) = \pm (x_1 - x_0) Am$$

oder $$x = x_1 \pm (x_1 - x_0)\left(\frac{Am}{l \mp Am}\right).$$

Zur Berechnung der Differentialquotienten l und m kann man

nun aber die Differenzen in den Logarithmentafeln, z. B. für Winkeländerungen um 1 Minute, anwenden.

Möge die Veränderung des Log. $f(x)$ für eine Veränderung $dx = +1'$, also (wenn M der Modulus der Briggischen Logarithmen ist)

$$\left[\frac{df(x)}{dx}\right] \times \frac{M \sin 1'}{f(x)} \text{ bezeichnet werden mit } \lambda$$

und die Veränderung des Log. $F(C \pm x)$ für eine Veränderung $d(C \pm x) = +1'$, also

$$\left[\frac{dF(C \pm x)}{d(C \pm x)}\right] \times \frac{M \sin 1'}{F(C \pm x)} \text{ bezeichnet werden mit } \mu.$$

Hiernach hat man $l = \lambda \times \frac{f(x)}{M \sin 1'}$ und $m = \mu \times \frac{F(C \pm x)}{M \sin 1'}$ und, wenn man dies in den obigen Ausdruck für x durch l und m einträgt:

$$x = x_1 \pm (x_1 - x_0)\left(\frac{\mu}{\lambda \mp \mu}\right).$$

Im vorliegenden Falle ist $x = \frac{1}{2} \Delta z_s$, ferner $C = z_s$; sodann ist die Funktion $f(x)$ der Sinus und die Funktion $F(C + x)$ die Cosecante, endlich $A = \cos \delta \cos \delta_z \sin \frac{1}{2}(\tau - \tau_s) \cdot \sin \frac{1}{2}(\tau + \tau_s)$.

Man würde also zunächst durch Eintragung von $x_0 = \frac{1}{2}(z - z_s)$, wo z der beobachtete Wert und z_s der singuläre Näherungwert von z für τ_s ist, finden

$$\sin x_1 = A \operatorname{cosec}(C + x_0)$$

dann die Veränderung λ des $\log \sin x_1$ für ein $dx = +1'$ aus der Tafel entnehmen, ebenso die Veränderung μ des $\log \operatorname{cosec}(C + x_0)$ für ein $d(C + x) = +1'$ aus der Tafel entnehmen, wonach man wie oben hätte:

$$x = x_1 + (x_1 - x_0)\left(\frac{\mu}{\lambda - \mu}\right) \text{ und } \Delta z_s = 2x.$$

Dieses Verfahren ist, bei gehörig naher Annahme des ersten Näherungswertes x_0, sehr bequem und reicht im allgemeinen über Unterschiede $\tau - \tau_s$, welche mehrere Zehner des Grades betragen können, so lange $\sin(C \pm x)$ erheblich größer als $\sin x$, also hier $\sin \frac{1}{2}(z - z_s)$ erheblich kleiner als $\sin \frac{1}{2}(z + z_s)$ ist.

Es wird bei solchen Differenzen-Rechnungen in logarithmischer Form nur ratsam sein, sich für die richtige Zeichengebung in anderen

bezüglichen Gruppen von Fällen eine Kontrolle durch eine einzelne direktere Rechnung zu schaffen.

Durch die obigen Differenzenbestimmungen $z - z_s$, bei denen für Unterschiede der a und der τ im Betrage von starken Bruchteilen eines Quadranten mit sechsstelliger, höchstens siebenstelliger logarithmischer Rechnung eine Genauigkeit der Übertragungen bis auf $0'',01$ sicher erreicht wird, kann man nun in der Tat, besonders bei einer größeren Zahl von näher zusammenliegenden Beobachtungen von z eine sehr bequeme Berechnung jedes Näherungswertes von z für jede der Beobachtungszeiten auf Grund von bestimmten singulären Ausgangswerten erreichen.

Was nun die Berechnung der singulären Näherungswerte z_s betrifft, so haben wir oben (Seite 134ff.) dieselben bereits gegeben für $a = 0^\circ$ oder 180° und für $a = \pm 90^\circ$. Für die letzteren Werte können indessen die Gleichungen für z_s noch eine etwas schärfere, der Genauigkeit der logarithmischen Rechnung noch günstigere Form erhalten, die sich aus einfacher goniometrischer Entwicklung der obigen Gleichung ergibt und offenbar zur Rechnung sehr bequem ist. Die singulären z_s für $a = \pm 90^\circ$.

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \tau_s = \pm \sqrt{\frac{\sin(\delta_z - \delta)}{\sin(\delta_z + \delta)}}$$

und

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} z_s = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\delta_z - \delta)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\delta_z + \delta)}}.$$

Das doppelte Zeichen entspricht für τ_s auch dem doppelten Zeichen von $a_s = \pm 90^\circ$. Bei $a_s = -90^\circ$ tut man aber gut, die ganze weitere Rechnung für $z - z_s$ mit einem positiven τ_s durchzuführen, da bei dem symmetrischen negativen Werte von τ_s alsdann genau dasselbe für z herauskommt.

Hieran schließen sich die singulären Fälle $\tau_s = \pm 90^\circ$, für welche man leicht aus den Grundgleichungen Z die folgenden Relationen findet: Die singulären z_s für $\tau = \pm 90^\circ$.

$$\operatorname{cotg} a_s = \mp \operatorname{tang} \delta \cos \delta_z$$

und $\operatorname{cotg} z_s = \pm \operatorname{tang} \delta \sin \delta_z \sin a_s$ oder auch $= - \operatorname{tang} \delta_z \cos a_s$.

Bei der Ableitung von $z - z_s$ aus τ und τ_s ergibt sich hier der nachfolgende kleine Vorteil.

Da hier

$\sin \frac{1}{2}(\tau - \tau_s) = \sin \frac{1}{2}(\tau \mp 90^\circ)$ und $\sin \frac{1}{2}(\tau + \tau_s) = \sin \frac{1}{2}(\tau \pm 90^\circ)$,

so hat man leicht

$$\sin \tfrac{1}{2}(\tau - \tau_s) \times \sin \tfrac{1}{2}(\tau + \tau_s) = -\tfrac{1}{2}\cos \tau$$

und die obige Formel für Δz_s wird daher hier besonders einfach:

$$\sin \tfrac{1}{2}\Delta z_s = -\tfrac{1}{2}\frac{\cos \delta \cos \delta_z \cos \tau}{\sin (z_s + \tfrac{1}{2}\Delta z_s)}.$$

Die singulären z_s für $w = \pm 90^0$.

Für die oben schon erwähnten singulären Fälle $w_s = \pm 90^\circ$ hat man zunächst folgendes: Die Gleichung II 2 (Seite 138) wird

hierfür $$\cos \tau_s = \frac{\operatorname{tang} \delta_z}{\operatorname{tang} \delta}$$

und die Gleichung I 1 $$\sin a_s = \pm \frac{\cos \delta}{\cos \delta_z}$$

endlich die Gleichung III 1 $$\cos z_s = \frac{\sin \delta_z}{\sin \delta}.$$

Hieraus ergeben sich für die günstigste Form der logarithmischen Berechnung die folgenden Ausdrücke:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\tau_s = \sqrt{\frac{\sin(\delta - \delta_z)}{\sin(\delta + \delta_z)}}$$

und $$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} z_s = \sqrt{\frac{\sin \tfrac{1}{2}(\delta - \delta_z)}{\sin \tfrac{1}{2}(\delta + \delta_z)}}$$

sowie $$\operatorname{tang}(45^\circ \pm \tfrac{1}{2} a) = \sqrt{\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(\delta - \delta_z) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(\delta + \delta_z)}.$$

Die singulären z_s für $a = \pm 45^0$.

Auf Grund dieser singulären Werte von τ_s und z_s kann dann wieder nach den obigen Gleichungen für den zur Beobachtungszeit gehörenden Näherungswert τ der Näherungswert z berechnet werden. (Überall ist, wie oben angegeben, auch hier der obere Index Null als das Kennzeichen der Näherungswerte hinzuzufügen.)

Endlich ist noch eine Gruppe von singulären Fällen zu behandeln, welche gerade für unser ganzes obiges Rechnungsverfahren eine gewisse ausfüllende Bedeutung haben, da sie in dem großén Intervall zwischen den singulären Fällen $a_s = 0^\circ$ und 180° und $a_s = \pm 90^\circ$ liegen. Es sind dies die Fälle $a_s = \pm 45^\circ$.

Da man für $a_s = +45^\circ$ hat $\sin a_s = \cos a_s = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, so ist hier

$$\cos \delta \sin \tau_s = -\sin \delta \cos \delta_z + \cos \delta \sin \delta_z \cos \tau_s$$

ebenso $$\sin z_s = \cos \delta \sin \tau_s \times \sqrt{2}$$

wobei auch $$\cos z_s = \sin \delta \sin \delta_z + \cos \delta \cos \delta^z \cos \tau_s.$$

Man findet aus der ersten dieser drei Gleichungen:

$$\operatorname{tang} \tau_s = -\frac{\operatorname{tang} \delta \cos \delta_s}{\cos \tau_s} + \sin \delta_s .$$

Setzt man jetzt für $\sin \delta_z$ den Ausdruck $\operatorname{tang} W$, so ergibt sich:

$$\operatorname{tang} \tau_s - \operatorname{tang} W = -\frac{\operatorname{tang} \delta \cos \delta_s}{\cos \tau_s}$$

oder

$$\sin (\tau_s - W) = - \operatorname{tang} \delta \cos \delta_s \cos W,$$

wo $\cos \delta_z \cos W$ lediglich von δ_z abhängt, also eine sogenannte Ortskonstante ist. Trägt man nun den Ausdruck für $\cos \tau_s$ durch $\sin \tau_s$ aus der ersten der vorstehenden drei Gleichungen in die dritte derselben ein, so findet man:

$$\cos z_s = \frac{\sin \delta}{\sin \delta_z} + \operatorname{cotg} \delta_z \cos \delta \sin \tau_s$$

und wenn man jetzt durch die zweite der drei Gleichungen dividiert:

$$\operatorname{cotg} z_s = \frac{\operatorname{tang} \delta}{\sin \delta_s \sin \tau_s \sqrt{2}} + \frac{\operatorname{cotg} \delta_s}{\sqrt{2}} .$$

Hieraus wird durch eine leichte Transformation mit Hilfe der obigen ersten Gleichung in der Form:

$$\frac{\operatorname{tang} \delta}{\sin \tau_s} = \sec \delta_s [\sin \delta_z \operatorname{cotg} \tau_s - 1]$$

$$\operatorname{cotg} z_s = \frac{1}{\cos \delta_s \sqrt{2}} [\operatorname{cotg} \tau_s - \sin \delta_s]$$

oder, wenn jetzt wieder für $\sin \delta_s$ gesetzt wird $\operatorname{tang} W$

$$\operatorname{cotg} z_s = \frac{\cos (\tau_s + W)}{\sqrt{2} \cdot \cos \delta_z \cos W \sin \tau_s} .$$

Der Hilfswinkel W ist hier sehr leicht und mit siebenstelliger Rechnung bis auf $0'',01$ aus δ_s abzuleiten.

Der Wert von W ist z. B. für

$$\delta_s = 52^\circ 30' 17'',00 \text{ gleich } 38^\circ 25' 42'',988 .$$

Setzt man kurz $\tau_s - W = C_s$ und $\sqrt{2} \cos \delta_s \cos W$ kurz gleich $\frac{1}{C_w}$, so hat man auch:

$$\operatorname{cotg} z_s = C_w \times \frac{\cos [2W + C_s]}{\sin [W + C_s]} ,$$

wo also nach dem obigen:

$$\sin C_s = -\operatorname{tang} \delta \cos \delta_z \cos W$$

und

$$\tau_s = W + C_s.$$

Mit Hilfe der Werte τ_s und z_s können dann wieder für ganze Reihen von Werten τ durch die Differenzengleichungen entsprechende Wertreihen von Δz_s, somit auch von z berechnet werden.

Es ist klar, daß, während obige Entwicklung für $a_s = +45^\circ$ gilt, für $a_s = -45^\circ$ das gleiche τ_s mit entgegengesetztem Zeichen und das gleiche z_s gefunden wird.

Man könnte nun auch noch ein singuläres Wertpaar $a = \pm 135^\circ$ zur Erörterung bringen, indessen ist durch die Wertpaare für $\tau_s = \pm 90^\circ$ und die zu den beiden größten Digressionen gehörenden beiden τ_s in dem Intervall zwischen $a_s = \pm 90^\circ$ und $a_s = 180^\circ$ schon genügende Vorkehr getroffen, um die Δz_s-Gleichungen ausreichend anwenden zu können. Auch ergeben sich bei $a_s = \pm 135^\circ$ in kleineren Zenitdistanzen gewisse Bedenken und Übelstände bei der logarithmischen Art der Berechnung.

Über die zweckmäßigste Berechnung der Beobachtungen von sogenannten korrespondierenden Zenitdistanzen (oder sogenannten „gleichen Höhen").

Es bleibt noch ein wichtiger Punkt hier zu erörtern hinsichtlich der Verwertung der Messungen von sogenannten korrespondierenden Zenitdistanzen zu möglichst genauen Bestimmungen von α_z und δ_z (Zeit und Breite), zugleich mit der Erlangung von Bedingungsgleichungen zwischen den Örtern (α und δ) der Fixsterne, sowie der Sonne, des Mondes und der Planeten, wobei die Bestimmung des jeweiligen Mondortes am Himmel wesentlich zur Kenntnis der zugehörigen Ortszeit eines ersten oder gemeinsam angenommenen Normalmeridians, also in Verbindung mit der Ortszeit α_z des Beobachters zur Bestimmung der geographischen Länge des Beobachtungsortes dient. Bei allen diesen Verwertungen der Zenitdistanzen kann man nämlich eine sehr erhebliche Verstärkung des Sicherheitsgrades der Ergebnisse gewinnen, wenn man die verschiedenen Objekte zwar in möglichst verschiedenen Azimuten, aber in nahezu gleichen Zenitdistanzen beobachtet. Diese Gleichheit braucht keine absolute, sondern nur soweit eingehalten zu sein, daß die dabei noch zugelassenen Unterschiede von der Ordnung der mit den mikrometrischen Einrichtungen des Bildfeldes des Fernrohres (Fadennetz und mit Mikrometerschrauben bewegliche Fäden), oder von der Ordnung der mit den Mikrometerschrauben der Ablesungsmikroskope für die Kreiseinteilungen auszumessenden Winkelgrößen, oder auch von der

Ordnung der noch innerhalb der Libellenskalen abzulesenden kleinen Neigungsunterschiede sind. Ist diese Bedingung erfüllt, dann kann man auch annehmen, daß die Einflüsse der Durchbiegungen des Fernrohres und des Kreises und auch die noch verbliebenen Mängel der Kenntnis der Einteilungsfehler des Kreises auf alle diese Zenitdistanzmessungen identisch wirken werden, und daß auch, was besonders wichtig ist, die bei der Berücksichtigung der Strahlenbrechungswirkungen der Atmosphäre noch obwaltenden Unsicherheiten und Mängel für ganze Beobachtungsreihen in nahe gleichen Zenitdistanzen auch bei verschiedenen Azimuten gemeinsam sein werden, — vorausgesetzt, daß man die kleinen Unterschiede der Zenitdistanzen und die kleinen Veränderungen der meteorologischen Umstände innerhalb der ganzen, höchstens wenige Stunden umfassenden Beobachtungsreihe dabei gehörig berücksichtigt.

Es ist hierbei offenbar erforderlich, die zusammengehörigen Beobachtungen und Einstellungen auch in einer und derselben Lage des Instrumentes (entweder Lage I oder Lage II) auszuführen, wobei dann auch die letzten Verbesserungen der leicht zu bestimmenden Näherungswerte von S_i und λ_i (siehe Seite 121ff.) zusammen mit zu den obigen, der ganzen Beobachtungsreihe gemeinsamen Verbesserungen hinzuzufügen sind und dann unter dem summarischen Ausdrucke $\Sigma\Delta$ mit allen jenen Unsicherheiten und Mängeln der aus den Beobachtungen abgeleiteten Werte von z, insbesondere auch mit den die atmosphärischen Strahlenbrechungswirkungen betreffenden, zusammengefaßt werden können.

Hat man also im Azimut a_i von einem Objekt (α_i & δ_i) zur Uhrzeit U_i die Zenitdistanz (z_i) ermittelt, welche noch mit dem Fehleraggregat $\Sigma\Delta$ behaftet sein kann, so daß der wahre, von allen Instrumentalfehlern und der Strahlenbrechung völlig gereinigte Wert z_i gleich $(z_i)+\Sigma\Delta$ zu setzen wäre, und hat man dann im Laufe weniger Stunden in n verschiedenen Azimuten von n verschiedenen Objekten solche nahe gleiche Zenitdistanzen gemessen, die, abgesehen von den zufälligen Beobachtungsfehlern, sämtlich nur noch einer und derselben unbestimmten Verbesserung $\Sigma\Delta$ bedürftig sind, so würde man n Gleichungen von der Form haben:

$$(z_i) - z_i^0 = -\Sigma\Delta + x \cos\delta_z \sin a_i + y \cos a_i \\ - d\alpha_i \cos\delta_z \sin a_i - d\delta_i \cos w_i,$$

wo i der Reihe nach die Zahlenwerte 1 bis n anzunehmen hätte.

Verzichtet man auf die Bestimmung der Verbesserungen $d\alpha_i$ und $d\delta_i$, so hat man auf der rechten Seite der Gleichungen bloß drei Unbekannte durch die Zahlenwerte der linken Seiten zu bestimmen, nämlich außer x und y noch $\Sigma\Delta$, und es genügen dann drei Beobachtungen solcher korrespondierenden oder „gleichen" Zenitdistanzen in drei gehörig verschiedenen Azimuten, um x und y frei von $\Sigma\Delta$ zu ermitteln, also $\Sigma\Delta$ zu eliminieren oder hypothetisch zu bestimmen, hypothetisch insofern, als alle drei Unbekannten in aller Strenge eigentlich noch von den, zunächst noch beiseite gelassenen, letzten Korrektionen der α und δ abhängig sind.

Jene drei Gleichungen würden lauten:

$$(z_1) - z_1^0 = -\Sigma\Delta + x \cos\delta_s \sin a_1 + y \cos a_1$$
$$(z_2) - z_2^0 = -\Sigma\Delta + x \cos\delta_s \sin a_2 + y \cos a_2$$
$$(z_3) - z_3^0 = -\Sigma\Delta + x \cos\delta_s \sin a_3 + y \cos a_3$$

Dies ist im vorliegenden Falle die elementare Lösung der bekannten Aufgabe, aus drei „gleichen" Höhen die Zeit und die Breite mit Elimination der Kenntnis der letzten Verbesserung der als „gleich" angenommenen Höhen selber zu ermitteln, einer Aufgabe, die früher mit großer Strenge und goniometrischer Eleganz behandelt worden ist.

Nach allen obigen Darlegungen ist aber die vorstehende, ganz elementare Form für alle Beobachtungsumstände, nämlich zugleich für die Anwendung der Fehlertheorie, viel geeigneter, als jene strenge Form der Lösung der Aufgabe. Es kommt hinzu, daß die obige Form auch die unbegrenzte Möglichkeit zur Ausnutzung einer homogenen Reihe von einer beliebig großen Anzahl solcher korrespondierender oder „gleicher" Zenitdistanzen in möglichst verschiedenen Azimuten enthält und dabei auch die Bestimmung beliebiger, einer genaueren Bestimmung noch bedürftiger Unbekannten $d\alpha_i$ und $d\delta_i$ mit hinzuzuziehen gestattet, sowie auch die Bestimmung der bezüglichen Korrektionen für die α und δ des Mondes, wodurch zugleich eine unabhängige geographische Längenbestimmung ermöglicht wird.

Für die Zenitdistanzen würde nach obigen Darlegungen bei der öfter hervorgehobenen Absicht der vorliegenden Publikation, nur die wesentlichen methodischen und didaktischen Grundzüge der Astrometrie zu behandeln, kaum etwas wichtiges hinzuzufügen sein.

In betreff der Azimute könnte man nun ganz ähnliche Entwicklungen und Vorschläge für die rechnerische Behandlung der Aufgabe zur Erörterung bringen, wofür übrigens auch in den oben zusammengestellten Gleichungen schon wesentliche Anhaltspunkte gegeben wären. Indessen liegt die Sache bei den Azimuten wesentlich anders. Zunächst haben die Gleichungen für den Anschluß der zu beliebigen Näherungswerten von τ, für die Beobachtungsuhrzeiten, gehörenden Näherungswerte von a an solche singuläre Werte a_s, wie nach dem obigen die Quadranten und Oktanten von a, sowie an solche a_s, welche sich für τ_s und $w_s = \pm 90^0$ mit Vorteil berechnen lassen, nicht entfernt die einfache Gestalt, wie oben die Differenzengleichungen für $\Delta z_s = z - z_s$. Sodann aber haben für die Azimute sehr genaue und dabei für eine große Zahl benachbarter Beobachtungen besonders ökonomisch eingerichtete Anschlußrechnungen keineswegs dieselbe Bedeutung wie für die Zenitdistanzen, bei denen mancherlei astronomische und physikalische Untersuchungen durch große und dabei möglichst genau berechnete Beobachtungsreihen von z, zumal auch von Mondzenitdistanzen, sehr erheblich gefördert werden können, und bei denen sozusagen unabhängige Beobachtungswerte in jedem Augenblick aus der Lotrichtung abgeleitet werden können. Bei den Azimuten können genauere absolute Werte nur von größeren, für längere Zwischenzeiten besonders stetig zu lagernden Instrumenten erlangt werden, und dann tritt an Stelle des Azimutes der Beobachtungsobjekte das Azimut des Achsenendes K, also a_k als eigentliche Unbekannte. Die Gleichungen bekommen dadurch auch andere Formen, über welche ich, zugleich mit den Berechnungsformen für die überaus wichtigen korrespondierenden Zenitdistanzmessungen bei konstanter, durch Querlibellen zu sichernder Drehungsphase der Achse K (konstantem Winkel $V = ZKS$) an der oben (Seite 108) erwähnten Stelle berichtet habe.

Schlußbemerkungen hinsichtlich der rechnerischen Behandlung der Azimutbestimmungen und in betreff der weiteren Fortsetzung der astrometrischen Didaktik

Übrigens werden für die gewöhnliche Praxis auch bei den Azimutbeobachtungen aus den obigen Gleichungen, insbesondere aus den auf Seite 141 ff. gegebenen, für das Verfahren mit den Näherungswerten schon genügende Anhaltspunkte hervorgehen.

Unter Umständen kann man z. B. bei Gruppen von sehr zahlreichen Beobachtungen der Azimute das Verfahren der Singulärwerte und der anschließenden Differenzengleichungen auch ganz vorteilhaft für die Hilfsgrößen, z. B. für B und tang N (Seite 147), zur Anwendung bringen.

Hiermit möge dieses erste Heft meines Buches über Astrometrie seinen Abschluß finden. Die nächste Fortsetzung wird sich wesentlich mit der allgemeinen didaktischen Darlegung der sphärischen Koordinatenänderungen durch die Lagenänderungen der Fixpunkte an der Sphäre, sowie mit den anderen Ursachen und Formen von scheinbaren Ortsveränderungen der Gestirne an der Sphäre beschäftigen und den Übergang auf die Zeit- und Raummessungen machen.

Inhaltsverzeichnis.




QB145
F6
Foerster
168329